1º) Determina a y b para que la función $f(x)=\begin{cases} ax-3 & si\ x<4 \\ -x^2+10x-b & si\ x\geq 4\end{cases}$ cumpla las hipótesis de Teorema de Lagrange en el intervalo [2, 6]. Halla el valor que cumple el teorema en dicho intervalo.

Resolución

Continuidad en $\mathbb{R}$:

$\forall x\in\mathbb{R}, x<4\ \ f(x)=ax-3$, continua por ser polinómica .

$\forall x\in\mathbb{R}, x>4\ \ f(x)=-x^2+10x-b$, continua por ser polinómica

Veamos que $f(x)$ es continua en $x=4$:

1º) $f(4)=24-b$

2º) $\lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4^+}(-x^2+10x-b)=24-b$

$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^-}(ax-3)=4a-3$; por tanto, $4a-3=24-b, 4a+b=27$

Por tanto, $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ si $4a+b=27$ y en particular en el intervalo $[2,6]$

Derivabilidad

$$f'(x)=\begin{cases} a & si\ x<4 \\ -2x+10 & si\ x>4\end{cases} \text{ bien definida}$$

Para que $f(x)$ sea derivable en el intervalo $(2,6)$, ha de serlo en $x=4$:

$$a=f'(4)^-=f'(4)^+=2$$

$$\begin{cases} a & =2 \\ 4a+b & =27\end{cases} \quad \text{de donde } a=2 \text{ y } b=19$$

$$f(x)=\begin{cases} 2x-3 & si\ x<4 \\ -x^2+10x-19 & si\ x\geq 4\end{cases}$$

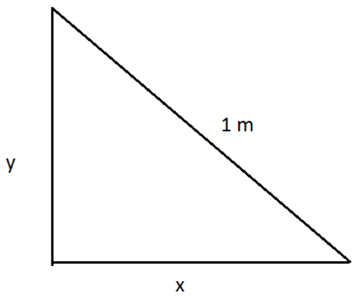
Se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[2,6]$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\ continua\ en\ [2,6] \\ f(x)\ derivable\ en\ (2,6)\end{array}\right\} \overset{T.Valor\ medio}{\Longrightarrow} \exists c\in(2,6)\ tal\ que\ f'(c)=\frac{f(6)-f(2)}{4}=\frac{5-1}{4}=1$$

$$f'(c)=1 \Leftrightarrow \begin{array}{c} 2=1\quad Absurdo \\ -2c+10=1 \Leftrightarrow c=\frac{9}{2}\in(2,6)\end{array}$$

2º) Halla las dimensiones del triángulo rectángulo de lado mayor 1 metro y área máxima.

Resolución



Sean x e y las medidas en metros de los catetos del triángulo .

$$x^2+y^2=1\ es\ la\ restricción\ del\ problema$$

La función área es $A(x,y)=\frac{1}{2}x\cdot y$

Planteamiento del problema:

$$\left[\begin{array}{lll} maximizar\ \ A(x,y)=\frac{1}{2}x\cdot y & & función\ objetivo \\ \quad s.a & x^2+y^2=1 & restricción\end{array}\right.$$

[1] $y=\sqrt{1-x^2}$; $A(x)=\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{1-x^2}$

$$A'(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-x^2}-\frac{2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$A'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}=0\Leftrightarrow\sqrt{1-x^2}=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\Leftrightarrow 1-x^2=x^2\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $A'(0) = 1 > 0$ y $A'(0{,}8) < 0$, la función área crece a la izquierda del valor $\frac{\sqrt{2}}{2}$ y decrece a su derecha. El valor $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ m es el máximo de la función área.

Sustituyendo en [1] obtenemos $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ m.

El área máxima es $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{4}\, m^2$

3º) Demuestra que la ecuación $2x + 3x^2 + 4x^3 = -1$ tiene exactamente una raíz real.

Resolución

Sea $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$, función continua en $\mathbb{R}$ por ser polinómica.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ continua\ en\ [-1,0] \\ f(-1) = -2 < 0 \\ f(0) = 1 > 0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \exists c_1 \in (-1,0)\ tal\ que\ f(c_1) = 0 \Leftrightarrow 4{c_1}^3 + 3{c_1}^2 + 2c_1 + 1 = 0$$

Así c_1 es raíz de la ecuación $4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$. Veamos que no tiene más.

Supongamos que c_2 fuese otra raíz de la ecuación; así $4{c_2}^3 + 3{c_2}^2 + 2c_2 + 1 = 0$ y $f(c_2) = 0$

Aplicando el teorema de Rolle a la función $f(x)$ en el intervalo (c_1, c_2) se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ continua\ en\ [c_1, c_2] \\ f(x)\ derivable\ en\ (c_1, c_2) \\ f(c_1) = f(c_2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists x_1 \in (c_1, c_2)\ tal\ que\ f'(x_1) = 0$$

es decir, encontramos un punto x_1 de derivada nula.

Sin embargo, $f'(x) = 12x^2 + 6x + 2$ y $12x^2 + 6x + 2 = 0$ no tiene solución real; esto contradice la existencia de un valor x_1 con derivada nula. La contradicción viene de suponer la existencia de una segunda raíz c_2. Por tanto, la ecuación tiene exactamente una raíz c_1.

4º) Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2 + 4)^{\frac{1}{Lx}}$

Resolución

a) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right) \overset{\infty-\infty}{\triangleq} \lim_{x\to 0} \frac{x - e^x + 1}{x \cdot (e^x - 1)} \overset{\frac{0}{0}\,L'Hôp}{\triangleq} \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^x}{e^x - 1 + xe^x} \overset{\frac{0}{0}\,L'Hôp}{\triangleq} \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{e^x + e^x + xe^x} = -\frac{1}{2}$$

b) $$\lim_{x\to +\infty} (x^2 + 4)^{\frac{1}{Lx}} \overset{+\infty^0}{\triangleq}$$

$$L\left(\lim_{x\to +\infty} (x^2 + 4)^{\frac{1}{Lx}}\right) = \lim_{x\to +\infty} L\left((x^2 + 4)^{\frac{1}{Lx}}\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{Lx} \cdot L(x^2 + 4)\right) \overset{0.\infty}{\triangleq} \lim_{x\to +\infty} \frac{L(x^2 + 4)}{Lx} \overset{\frac{+\infty}{+\infty},L`Hôp}{\triangleq}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 4} = 2$$

Así $L\left(\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2 + 4)^{\frac{1}{Lx}}\right) = 2$, de donde $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2 + 4)^{\frac{1}{Lx}} = e^2$

5º) Demuestra que la curva $f(x) = x - 2cosx$ tiene un punto de inflexión en el interior del intervalo $[0, \pi]$ y halla la ecuación de la recta tangente a la curva en ese punto.

Resolución

$a)\ f'(x) = 1 + 2senx\ ;\ f''(x) = 2cosx\ ;\ f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2cosx = 0 \Leftrightarrow cosx = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ en $(0, \pi)$

$f'''(x) = -2senx\ ;\ f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \neq 0$. Por tanto, en el punto $P\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ hay inflexi�. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$

La recta tangente es $t \equiv y - \frac{\pi}{2} = 3\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; $t \equiv y = 3x - \pi$

6�) Estudia el dominio, corte con los ejes, monoton�, curvatura y as�totas de la funci� $f(x) = \frac{2x^2}{x+1}$. Esboza su gr�ca.

Resoluci�

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ porque $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Cortes con los ejes coordenados: $O(0, 0)$

Monoton� : $f'(x) = \frac{4x\cdot(x+1) - 2x^2}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+4x}{(x+1)^2};\ \begin{cases} Ceros: 2x^2 + 4x = 0 \Longrightarrow x = 0; x = -2 \\ Polos:\ (x+1)^2 \Longrightarrow x = -1 \end{cases}$

Signo de f'	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +\infty)$
	$+$	$-$	$-$	$+$

$f(x) crece\ en\ (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)\ ;\ \ f(x) decrece\ en\ (-2, -1) \cup (-1, 0)$

Curvatura: $f''(x) = \frac{4}{(x+1)^3}\begin{cases} > 0\ en\ (-1, +\infty)\ Cóncava \\ < 0\ en\ (-\infty, -1\ ) Convexa \end{cases}$

As�totas :

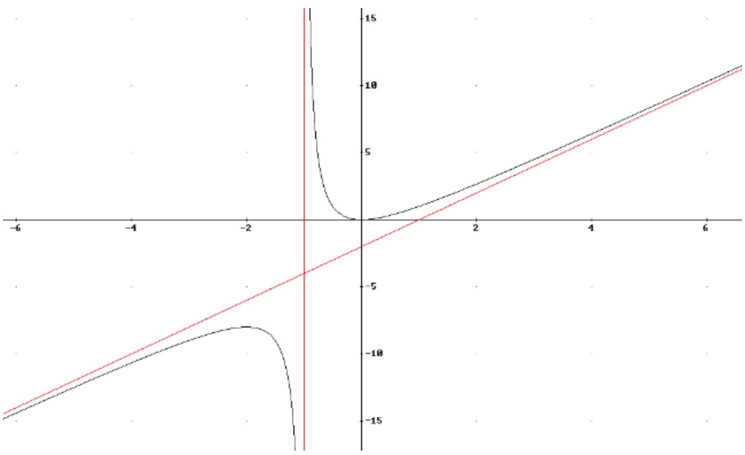
$$\lim_{x \to -1} \frac{2x^2}{x+1} \overset{\frac{2}{0}}{=} \begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{2x^2}{x+1} \overset{\frac{2}{0^-}}{=} -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{2x^2}{x+1} \overset{\frac{2}{0^+}}{=} +\infty \end{cases}$$ la recta $x = -1$ es as�tota vertical.

As�tota horizontal no tiene porque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x+1} = \pm\infty$

As�tota oblicua: $y = mx + n$

$m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{2x^2}{x+1}}{x} = 2$; $n = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{2x^2}{x+1} - 2x\right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{-2x}{x+1} = -2$; $y = 2x - 2$ es as�tota oblicua .

Representaci� gr�ca



Puntuaci�

1, 2, 4, 6 ------- 2 puntos

3, 5 ------------- 1 "