1º) Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2+3x-1}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x^2-1}-\frac{1-7x}{8x+2}\right)^{5-2x}$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3+2x^2}{x^2-1}-\frac{3+5x^2}{3x}\right)^{\frac{2x}{3}}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3-5x-x^2}{5x-x^2}\right)^{\frac{2x}{3}}$

e) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt{2x+11}+3x}{x^2-1}$

Resolución

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2+3x-1}\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(3x-\sqrt{9x^2+3x-1}\right)\left(3x+\sqrt{9x^2+3x-1}\right)\cdot}{3x+\sqrt{9x^2+3x-1}}=$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x+1}{3x+\sqrt{9x^2+3x-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x}{3x+3x}=\frac{-1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x^2-1}-\frac{1-7x}{8x+2}\right)^{5-2x}\overset{\left(\frac{7}{8}\right)^{-\infty}}{=}+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3+2x^2}{x^2-1}-\frac{3+5x^2}{3x}\right)^{\frac{2x}{3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3+2x^2}{x^2-1}+\frac{3+5x^2}{3x}\right)^{\frac{-2x}{3}}\overset{(+\infty)^{-\infty}}{=}0$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3-5x-x^2}{5x-x^2}\right)^{\frac{2x}{3}}\overset{1^{\infty}}{=}e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{2x}{3}\cdot\left(\frac{3-5x-x^2}{5x-x^2}-1\right)\right]}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{2x}{3}\cdot\left(\frac{3-10x}{5x-x^2}\right)\right]}$

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{-20x^2+6x}{-3x^2+15x}\right]}=e^{\frac{20}{3}}=e^6\sqrt[3]{e^2}$

e) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sqrt{2x+11}+3x}{x^2-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to-1}\frac{\left(\sqrt{2x+11}+3x\right)\cdot\left(\sqrt{2x+11}-3x\right)}{(x^2-1)\cdot\left(\sqrt{2x+11}-3x\right)}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{-9x^2+2x+11}{(x^2-1)\cdot\left(\sqrt{2x+11}-3x\right)}=$
$\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x+1)\cdot(-9x+11)}{(x-1)\cdot(x+1)\cdot\left(\sqrt{2x+11}-3x\right)}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{-9x+11}{(x-1)\cdot\left(\sqrt{2x+11}-3x\right)}=\frac{20}{-2\cdot 6}=-\frac{5}{3}$

2º) Estudia y clasifica los puntos de discontinuidad de la función $f(x)=\frac{3x+3}{x^2+4x+3}$

Resolución

$x^2+4x+3=0\Longrightarrow\begin{cases}x=-3\\x=-1\end{cases}$ $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{-3,-1\}$ por ser racional

$\boldsymbol{x=-3}$

1º) $f(-3)$ no definido

2º) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{3x+3}{x^2+4x+3}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to-3^-}\frac{3x+3}{(x+3)\cdot(x+1)}\overset{\frac{-6}{0^+}}{=}-\infty\\\lim\limits_{x\to-5^+}\frac{3x+3}{(x+3)\cdot(x+1)}\overset{\frac{-6}{0^-}}{=}+\infty\end{cases}$ Discontinuidad de salto infinito en $x=-3$

$\boldsymbol{x=-1}$

1º) $f(-1)$ no definido

2º) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x+3}{x^2+4x+3}\overset{\frac{0}{0}}{\cong}\lim\limits_{x\to -1}\frac{3\cdot(x+1)}{(x+3)\cdot(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{3}{x+3}=\frac{3}{2}$

Discontinuidad evitable en $x=-1$; verdadero valor de la función $f(-1)=\frac{3}{2}$

3º) Considera la función $f(x)=\begin{cases} 3x+2 & si\ \ x<0 \\ x^2+2axcosx+b & si\ 0\le x<\pi \\ ax^2+b & si\ x\ge \pi \end{cases}$ **con** $a\in\mathbb{R}$.

Determina los valores de a y b para que la función sea continua en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales .

Resolución

a) $\forall x\in\mathbb{R}\ \ x<0,\ \ f(x)=3x+2$ continua por ser función polinómica.

$\forall x\in\mathbb{R}\ \ 0<x<\pi,\ f(x)=x^2+2axcosx+b$ continua (suma y producto de continuas).

$\forall x\in\mathbb{R}\ \ x>\pi\ ,\ \ f(x)=ax^2+b$ continua por ser función polinómica.

$x=0$ Exigimos que se cumplan las condiciones de continuidad en el punto $x=0$:

$Existencia\ de\ f(0)=b$

$$Existencia\ de\ \lim_{x\to 0}f(x)\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-}(3x+2)=2\\ \lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+2axcosx+b)=b\end{cases}$$

Por tanto se ha de cumplir que $b=2$

$x=\pi$ Exigimos que se cumplan las condiciones de continuidad en el punto $x=\pi$:

$Existencia\ de\ f(\pi)=a\pi^2+b\overset{b=2}{\cong}a\pi^2+2$

$$Existencia\ de\ \lim_{x\to \pi}f(x)\begin{cases}\lim\limits_{x\to \pi^-}(x^2+2axcosx+b)=\pi^2-2a\pi+2\\ \lim\limits_{x\to \pi^+}(ax^2+b)=a\pi^2+2\end{cases}$$

Por tanto se ha de cumplir que $\pi^2-2a\pi+2\ =a\pi^2+2$

$$a(2\pi+\pi^2)=\pi^2\Leftrightarrow a=\frac{\pi^2}{2\pi+\pi^2}=\frac{\pi}{\pi+2}$$

4º) Prueba que la ecuación $x\cdot Lx=2$ tiene alguna solución real.

Resolución

Sea $f(x)=x\cdot Lx-2$, función continua en $\mathbb{R}$ por ser resta y producto de continuas.

$$\left.\begin{matrix} f(x)\ continua\ en\ [1,e]\\ f(1)=-2<0\\ f(e)=e-2>0\end{matrix}\right\}\overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow}\ \exists x_0\in(1,e)\ tal\ que\ f(x_0)=0\Leftrightarrow x_0\cdot Lx_0-2=0$$

Por tanto, $x_0\in(1,e)$ es solución real de la ecuación $x\cdot Lx=2$

5º) Sean f y g dos funciones continuas en un intervalo $[a,b]$ tales que $f(a)>g(a)$ y $f(b)<g(b)$. Demuestra que existe $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=g(c)$.

Resolución

Sea $h(x)=f(x)-g(x)$ continua en $[a,b]$ por ser diferencia de continuas.

$$\left.\begin{matrix} h(x)\ continua\ en\ [a,b]\\ h(a)=f(a)-g(a)>0\\ h(b)=f(b)-g(b)<0\end{matrix}\right\}\overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow}\ \exists c\in(a,b)\ tal\ que\ h(c)=0\Leftrightarrow f(c)-g(c)=0\Leftrightarrow$$

$$f(c)=g(c)$$

6º) Probar que la función $f(x) = senx + 2x + 1$ toma el valor 2 en algún punto del intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, es decir, $\exists c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $f(c) = 2$.

Resolución

Vamos a utilizar el teorema de los valores intermedios (T.V.I)

$f(x) = senx + 2x + 1$ es continua en $\mathbb{R}$ por ser suma de continuas.

$$f(x)\ es\ continua\ en\ \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \overset{T.V.I}{\Longrightarrow} f(x)\ toma\ todos\ los\ valores\ comprendidos\ entre\ f(0) = 1$$

$y\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 + \pi$. Por lo tanto, como $2 \in (1, 2 + \pi)$, $existe\ c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\ tal\ que\ f(c) = 2$

7º) Demuestra que las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ y $g(x) = (x - 1)^2$ se cortan en algún punto.

Resolución

Sea $h(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} - (x - 1)^2$ continua en $\mathbb{R} - \{1\}$ porque $x - 1 = 0$ para $x = 1$

$$\left.\begin{array}{c} h(x)\ continua\ en\ [2,3] \\ h(2) = 2 > 0 \\ h(3) = -\dfrac{1}{2} < 0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \exists c \in (2,3)\ tal\ que\ h(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{c^2 - c + 1}{c - 1} - (c - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{c^2 - c + 1}{c - 1} = (c - 1)^2 \Leftrightarrow Las\ gráficas\ de\ las\ funciones\ se\ cortan\ en\ el\ punto\ de\ abscisa\ c$$

Puntuación

1 -------------------- 2,5 puntos

2, 3, 4, 5, 6, 7 ----- 1,25 “