1º) Sea A una matriz cuadrada de orden 2, de columnas C_1 y C_2 y determinante 4. Sea B otra matriz cuadrada de orden 2 y determinante 2. Si C es la matriz de columnas $C_1 + C_2$ y $3C_2$, calcúlese el determinante de la matriz $B \cdot C^{-1}$.

Resolución

Para hallar $|C|$, utilizamos las propiedades de los determinantes:

- Si a una fila o columna de un determinante se le suma una combinación lineal de las demás, su valor no cambia.

- Si una fila o columna de un determinante se multiplica por un número no nulo, éste queda multiplicado por dicho número.

Así se tiene que $|C| = 3 \cdot 4 = 12$

$$|B \cdot C^{-1}| = |B| \cdot |C^{-1}| = |B| \cdot \frac{1}{|C|} = 2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

2º) Si la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ tiene determinante 3, calcula:

a) $\begin{vmatrix} d & 2e & f \\ a & 2b & c \\ g & 2h & i \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a+b & b & 2c \\ d+e & e & 2f \\ g+h & h & 2i \end{vmatrix}$ **c)** $|2A|$

Resolución

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3$$

a) $\begin{vmatrix} d & 2e & f \\ a & 2b & c \\ g & 2h & i \end{vmatrix} \overset{\substack{Intercambio \\ filas}}{\cong} -\begin{vmatrix} a & 2b & c \\ d & 2e & f \\ g & 2h & i \end{vmatrix} \overset{2\ es\ factor\ en\ columna}{\cong} -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 = -6$

b) $\begin{vmatrix} a+b & b & 2c \\ d+e & e & 2f \\ g+h & h & 2i \end{vmatrix} \overset{\substack{columna\ 1\ es \\ suma\ de\ dos\ sumandos}}{\cong} \begin{vmatrix} a & b & 2c \\ d & e & 2f \\ g & h & 2i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & b & 2c \\ e & e & 2f \\ h & h & 2i \end{vmatrix} \overset{\substack{2\ es\ factor\ en\ columna\ 3 \\ 2\ columnas\ iguales}}{\cong}$

$$2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + 0 = 6$$

c) $|2A| = \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix} \overset{\substack{2\ es\ factor\ en \\ 3\ columnas}}{\cong} 2^3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 8 \cdot 3 = 24$

3º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

a) Calcula la inversa de la matriz C.

b) Halla las matrices X que satisfacen $X \cdot C + A = C + A^2$.

Resolución

a) $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$

$C_{11} = 2\ ;\ \ C_{12} = -4\ ;\ \ C_{13} = 1\ ;\ \ C_{21} = 0\ ;\ \ C_{22} = 2\ ;\ \ C_{23} = -2\ ; C_{31} = 0\,;\ C_{32} = 0\,;\ C_{33} = 1$

$$Adj(C) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{|C|} \cdot \left(Adj(C)\right)^t = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $X \cdot C + A = C + A^2 \Leftrightarrow X \cdot C = C + A^2 - A \Leftrightarrow X = (C + A^2 - A) \cdot C^{-1}$

$$C + A^2 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = C$$

$$X = (C + A^2 - A) \cdot C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

El resultado obtenido se podría haber previsto desde el momento en que $C + A^2 - A = C$

Así $X = (C + A^2 - A) \cdot C^{-1} = C \cdot C^{-1} = I_3$

4º) Un mayorista del sector turístico vende a la agencia de viajes A, 10 billetes a destinos nacionales, 10 billetes a destinos extranjeros europeos comunitarios y 10 billetes a destinos internacionales no comunitarios, cobrando por todo ello 12000 euros. A una agencia B le vende 10 billetes a destinos nacionales y 20 a internacionales no comunitarios, y cobra 13000 euros. A una tercera agencia C le vende 10 billetes a destinos nacionales y 10 a destinos europeos comunitarios, cobrando 7000 euros. Se pide:
a) Hallar el precio de cada tipo de billete.
b) Por razones de mercado, el mayorista se ve obligado a bajar un 20% el precio de todos los billetes nacionales. Hallar en qué porcentaje debe incrementar el precio de todos los billetes extranjeros comunitarios (suponiendo que mantiene constante el precio de todos los billetes internacionales no comunitarios) para mantener constante sus ingresos totales por las ventas a las tres agencias.

Resolución

a)

$x \equiv precio\ del\ billete\ a\ destinos\ nacionales.$
$y \equiv precio\ del\ billete\ a\ destinos\ europeos\ comunitarios.$
$x \equiv precio\ del\ billete\ a\ destinos\ internacionales\ no\ comunitarios.$

El sistema de ecuaciones lineales que resuelve el problema es:

$$\begin{cases} x + y + z = 1200 \\ x + \quad\ \ 2z = 1300 \\ x + y \quad\ \ = 700 \end{cases} \quad \text{Restando primera y tercera ecuación:} \quad z = 500\ euros$$

$$x + \quad 2z = 1300 \Leftrightarrow x + 1000 = 1300 \Leftrightarrow x = 300\ euros$$

$$x + y + z = 1200 \Leftrightarrow 300 + y + 500 = 1200 \Leftrightarrow y = 400\ euros$$

b) $r \equiv porcentaje\ de\ incremento\ de\ cada\ billete\ extranjero\ comunitario.$

$$30 \cdot 0{,}8 \cdot 300 + 20 \cdot 400 + 20 \cdot \frac{r}{100} \cdot 400 + 30 \cdot 500 = 32000$$

$$7200 + 8000 + 80r + 15000 = 32000$$

$$80r = 1800$$

$$r = 22{,}5\%$$

5º) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + \quad y \qquad\quad = 1 \\ \qquad ay + \quad z \; = 0 \\ x + (1+a)y + az \; = a+1 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de a.
b) Resuélvase el sistema cuando sea compatible indeterminado.
c) Resuélvase para $a = -1$.

Resolución

a) Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{pmatrix}$

Matriz ampliada: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & a & a+1 \end{pmatrix}$

Vemos el rango de la matriz A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{vmatrix} \overset{F3-F1}{\widehat{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & a & a \end{vmatrix} = a^2 - a$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow a^2 - a = 0 \Leftrightarrow a \cdot (a-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Caso 1 $\forall a \in \mathbb{R}\ a \neq 0,\ a \neq 1,\ |A| \neq 0.\ rg(A) = 3 = rg(A^*) = Nº\ incógnitas$

$$Sistema\ Compatible\ Determinado\ (Solución\ única)$$

Caso 2 $a = 0$. En este caso $|A| = 0\ y\ rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la primera fila y cuarta columna de A^*:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{Columnas \\ iguales}}{\widehat{=}} 0$$ y, por tanto, $rg(A^*) = 2$

$$2 = rg(A) = rg(A^*) < nº\ incógnitas.\quad Sistema\ Compatible\ Indeterminado$$

Caso 3 $a = 1$. En este caso $|A| = 0\ y\ rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^*:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ y, por tanto, $rg(A^*) = 3$

$$2 = rg(A) \neq rg(A^*) = 3. \ Sistema\ Incompatible\ (No\ tiene\ solución)$$

b) Resolvemos para $a = 0$.

Observando el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, el sistema equivalente viene dado por las ecuaciones cuyos coeficientes forman parte de dicho menor, esto es

$$\begin{cases} z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Las incógnitas principales del sistema son aquellas cuyos coeficientes forman parte de las columnas del menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, es decir y , z. La incógnita x actúa como incógnita no principal o parámetro. Así tenemos:

$$x = t; \quad \begin{cases} z = 0 \\ t + y = 1 \end{cases}$$

$$La\ solución\ viene\ dada\ por \ \begin{cases} x = \ t \\ y = 1 - t \\ z = 0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

c) Resolvemos para $a = -1$. Estamos en el caso 1. Sistema compatible determinado.

$$\begin{cases} x + \ \ y \qquad = 1 \\ \qquad -y \ + z = 0 \\ x \qquad\quad - z = 0 \end{cases}$$

Sumando miembro a miembro las tres ecuaciones, obtenemos $2x = 1$, de donde $x = \frac{1}{2}$

Así $y = 1 - x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ y $z = x = \frac{1}{2}$

Puntuación

1, 2 ---------- 1,5 puntos
3 ------------- 2 "
4, 5 ---------- 2,5 "