Matrices

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **se pide:**

a) $3A - 2B^t$
b) $(A+B)^2$
c) $A^2 + 2AB + B^2$
d) ¿Por qué los dos resultados anteriores no son iguales?

Solución

a) $\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ d) El producto de matrices no es conmutativo

2º) Determinar los valores de x, y, z **para que se verifique la igualdad** $\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

Solución

Hay cuatro ternas posibles:

$x = -2; y = 2; z = 1$ $x = 2; y = 2; z = -1$ $x = 2; y = -2; z = 1$ $x = -2; y = -2; z = -1$

3º) Determinar dos matrices X **e** Y **tales que** $3X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ **y** $4X - 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Solución

$X = \begin{pmatrix} -1 & -14 \\ 18 & -3 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} -2 & -20 \\ 23 & -4 \end{pmatrix}$

4º) Halla las matrices que conmutan con la matriz

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solución

Son de la forma: a) $X = \begin{pmatrix} a & d-a \\ d-a & d \end{pmatrix}$ $\forall\, a, d \in \mathbb{R}$; b) $Y = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & 0 \\ g & d & a \end{pmatrix}$ $\forall\, a, d, g \in \mathbb{R}$

5º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$**, halla** A^n**, siendo** n **un número natural arbitrario.**

Solución

$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

6º) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$**. Halla** A^n**, donde** n **es un número natural arbitrario.**

Solución

$$A^n = \begin{cases} A \ \ si\, n\, impar \\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ \ si\, n\ \ par \end{cases}$$

7º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ **calcula**

a) A^{100}
b) B^{428}

Solución

a) $A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 100 & 1 & 0 \\ 100 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B^{428} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

8º) Calcular el valor de A^{37} **siendo** $A=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Solución

$$A^{37}=\begin{pmatrix}1 & \frac{37}{7} & \frac{37}{7}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

9º) Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

a) Calcúlese una matriz B **tal que se cumpla** $A+B=AA^t$
b) Para la matriz B **anterior, obténgase la expresión de** B^k**, siendo** k **un número natural.**

Solución

a) $B=A\cdot(A^t-I)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$; b) $B^k=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ k & 1 & 0\\ k-1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

10º) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & -2\\ -1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$**, determinar, si es posible, un valor de** λ **para el que la matriz** $(A-\lambda\cdot I)^2$ **sea la matriz nula (** I **denota la matriz unidad de orden 3)**

Resolución

$$(A-\lambda\cdot I)^2=\begin{pmatrix}\lambda^2-1 & 2\lambda-2 & 4\lambda-4\\ 2\lambda-2 & \lambda^2-1 & 4\lambda-4\\ -2\lambda+2 & -2\lambda+2 & -4+(3-\lambda)^2\end{pmatrix};\ (A-\lambda\cdot I)^2=O \Leftrightarrow \lambda=1$$

11º) Sabiendo que la matriz $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & -2 & 4\\ 6 & -5 & -6 & 12\\ 3 & -3 & -2 & 6\\ 3 & -3 & -3 & 7\end{pmatrix}$ **es idempotente, es decir verifica** $A^2=A$**, determinar un valor no nulo del número real** λ **tal que** $(\lambda\cdot A-I)^2=I$**, siendo** I **la matriz identidad de orden 4.**

Resolución

$$(\lambda\cdot A-I)^2=I \Leftrightarrow \lambda^2A^2-2\lambda A+I^2=I \overset{A^2=A}{\Leftrightarrow} \lambda^2A-2\lambda A=0 \Leftrightarrow (\lambda^2-2\lambda)A=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=0\\ \lambda=2\end{cases}$$

12º) Determinar la matriz X **que satisface la ecuación** $3X+I=AB-A^2$**, siendo**

$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$ e I **la matriz identidad de orden tres**

Solución

$$X=\begin{pmatrix}-1/3 & 4/3 & -8/3\\ 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

13º) En un colegio se imparten los cursos de 1º, 2º y 3º de ciertas enseñanzas. Los profesores tienen asignado un número de horas de clase, guardias y tutorías a cubrir, de acuerdo con la siguiente matriz, en la que las filas representan los cursos:

$$M=\begin{pmatrix}20 & 5 & 3\\ 18 & 6 & 5\\ 22 & 1 & 22\end{pmatrix}$$

El colegio paga cada hora de clase a 20 €, cada hora de guardia a 5 € y cada hora de tutoría a 10 €, según la matriz columna $C = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$**. El colegio dispone de 5 profesores para el primer curso, 4 para el segundo y 6 para el tercero, representados por la matriz** $P = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.
Calcula cada uno de los siguientes productos de matrices e interpreta los resultados:
a) $P \cdot M$
b) $M \cdot C$
c) $P \cdot M \cdot C$

Solución

a) Horas totales de clases, guardias y tutorías.
b) Precio total de cada curso.
c) Precio total de todas las actividades (clases + guardias + tutorías) de todos los cursos.

14º) Halla todas las matrices $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ **que satisfacen la ecuación** $X^2 = 2X$, **siendo** $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Solución

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;;\; X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 2 \end{pmatrix} \;;\; X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \;;\; X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \quad \forall\, b \in \Re$$

15º) Una fábrica produce tres tipos de artículos, A, B y C, y distribuye su producción entre cuatro clientes. En el mes de marzo, el primer cliente ha adquirido 9 unidades de A, 5 de B y 2 de C; el segundo cliente, 3, 8 y 10 unidades respectivamente; el tercer cliente no compró nada, y el cuarto 6, 7 y 1 unidades, respectivamente. En abril, el cuarto cliente no hizo pedido alguno, el tercer cliente compró 4 unidades de cada artículo, mientras que los otros dos duplicaron el número de unidades adquiridas en marzo.
a) Construye las matrices 4x3 correspondientes a las ventas de marzo y abril.
b) Si los precios de los artículos, en euros, por unidad son 60, 48 y 54 respectivamente, calcula lo que factura la fábrica a cada cliente por sus pedidos en los meses de marzo y abril.

Resolución

a) Marzo: $M = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ Abril: $A = \begin{pmatrix} 18 & 10 & 4 \\ 6 & 16 & 20 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donde las filas indican clientes y las columnas artículos.

b) La matriz de costes es $C = \begin{pmatrix} 60 \\ 48 \\ 54 \end{pmatrix}$

$$(M + A) \cdot P = \begin{pmatrix} 2664 \\ 3312 \\ 648 \\ 750 \end{pmatrix}$$

La fábrica factura 2664 euros al cliente 1, 3312 euros al cliente 2, 648 euros al cliente 3 y 750 euros al cliente 4.