Matrices y determinantes

1º) Aplica la regla de Sarrus para calcular el valor de los determinantes siguientes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 7 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

Solución

a) -23 b) -12 c) 42

2º) Sabiendo que el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ es igual a 1, calcula el valor del determinante de la matriz $B = \begin{pmatrix} 3+x & 8+y & 4+z \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 8/3 & 4/3 \end{pmatrix}$

Solución

$|B| = \dfrac{2}{3}$

3º) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 1$, calcula el determinante $\begin{vmatrix} c & b & a \\ i & h & g \\ f & e & d \end{vmatrix}$

Solución

El valor del determinante es 1

4º) Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ sabiendo que $\begin{vmatrix} -d & -e & -f \\ -a & -b & -c \\ -g & -h & -i \end{vmatrix} = 100$

Solución

El valor del determinante es 100

5º) Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = 5$, **calcula** $\begin{vmatrix} 2x & z & 3y \\ 2p & r & 3q \\ 2a & c & 3b \end{vmatrix}$

Solución

El valor del determinante es -30

6º) Demuestra, sin desarrollar, que es nulo el determinante $\begin{vmatrix} a & 3a & 4a \\ b & 5b & 6b \\ c & 7c & 8c \end{vmatrix}$

Resolución

La tercera columna es combinación lineal de las otras dos: $C_3 = C_1 + C_2$

7º) Calcula el determinante de Vandermonde $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

Solución

El valor del determinante es $(b-a)\cdot(c-a)\cdot(c-b)$

8º) Calcula el valor de los determinantes del *ejercicio* 1 desarrollando cada uno de ellos por la primera columna.

9º) Calcula el valor de los determinantes del *ejercicio* 1 haciendo "ceros".

10º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, calcula la matriz $B = A \cdot A^t - 5 \cdot A^{-1}$

Solución

$B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$

11) Resuelve la ecuación matricial $2 \cdot X - A \cdot X = C - B \cdot X$ **, siendo**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \textbf{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

12) Determina la matriz X que verifica la ecuación $A^2 \cdot X - B = A \cdot X$ **siendo**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \textbf{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ -3/2 & 5/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

13) Sea $A = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix}$

a) Calcula A^2

b) Calcula todos los valores de x **e** y **para los que se verifica que** $A^2 = \begin{pmatrix} x+1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Resolución

$a)\ A^2 = \begin{pmatrix} x^2-1 & -(x+y) \\ x+y & y^2-1 \end{pmatrix}$ b) $x = 2\ e\ y = 0$

14) Halla X **en la ecuación** $AXB = 2C$ **siendo** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Solución

$$X = A^{-1}(2C)B^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

15) Sea $m \in \mathbb{R}$**. Discute el rango de la matriz** $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \\ -5 & -10 & m \end{pmatrix}$ **según los valores de** m.

Solución

$m \neq 15 \Longrightarrow rg(M) = 3$; $m = 15 \Longrightarrow rg(M) = 2$

16) Para cada valor del número real t**, se considera la matriz** $A = \begin{pmatrix} 1 & t & 2t^2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Encontrar todos los valores de t **para los que la matriz** A **no tiene inversa.**

b) Calcula la matriz X **que verifica** $A \cdot X = I$ **cuando** $t = -1$.

Solución

a) $t = 1$; $t = -1/2$ b) $X = A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$

17) Se sabe que la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & -1 \\ 7 & 4 & 1 & 6 \\ -9 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & -3 \end{pmatrix}$**, verifica la igualdad** $A^2 = A + I$**, siendo** I **la matriz identidad. Calcula** A^{-1} y A^4.

Solución

a) $A^{-1} = A - I$

b) $A^4 = 3A + 2I$

18) Sea A **una matriz cuadrada de orden** 3 **tal que** $A^3 - 3A^2 + 2A + I = O$**, siendo** I **la matriz unidad de orden 3. Demostrar que** A **tiene inversa y calcularla en función de** A.

Solución

$A^{-1} = -A^2 + 3A - 2I$

19º) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

a) Calcúlese la matriz inversa de A.

b) Resuélvase la ecuación matricial $A \cdot X = B - I$ **donde** I **es la matriz identidad.**

Solución

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $X = A^{-1} \cdot (B - I) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

20º) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & k & 0 \\ -k & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcúlense los valores de k **para los cuales la matriz** A **no es invertible.**

b) Para $k = 0$**, calcúlese la matriz inversa** A^{-1}.

c) Para $k = 0$**, resuélvase la ecuación matricial** $AX = B$.

Resolución

a) $|A| = k^2 - 4k + 3$; $|A| = 0 \iff k^2 - 4k + 3 = 0 \iff \begin{cases} k = 1 \\ k = 3 \end{cases}$

b) $k = 0$; $|A| = 3$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ -4 & -4/3 & 1 \\ 1 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$

c) $k = 0$; $X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

21º) Calcula el determinante $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & y \\ 1 & x & 0 & z \\ 1 & y & z & 0 \end{vmatrix}$

Solución

El valor del determinante es $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$

22º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **, comprueba que** $A^{-1} = A^t$ **y utilizando este resultado, calcula** $(A^t \cdot A)^{2001}$.

23º) Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a+1 & a+2 \\ a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \end{vmatrix}$

Solución

El valor del determinante es 2.

24º) Determina el valor de a **que anula el siguiente determinante** $\begin{vmatrix} a+1 & a & a \\ a & a+1 & a \\ a & a & a+1 \end{vmatrix}$

Solución

El valor del determinante es $3a + 1$; $3a + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$ es el valor que lo anula.

25º) Calcula el determinante $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+b & b+c & c+a \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$ **en función de** a, b **y** c**, simplificando el resultado.**

Solución

El valor del determinante es $-a^3 - b^3 - c^3 + 3abc$

26º) Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **donde** $\lambda \in \mathbb{R}$

Encontrar los valores de λ **para los que** AB **es invertible.**
Determinar los valores de λ **para los que** BA **es invertible.**

Resolución

a) $det(A \cdot B) = 2\lambda^2 + 3\lambda - 2;\quad 2\lambda^2 + 3\lambda - 2 \neq 0 \Longrightarrow$La matriz es invertible $\forall\, \lambda \in \mathbb{R} \begin{cases} \lambda \neq -2 \\ \lambda \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

b) No existen

27º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

a) Justifica que tiene inversa y halla A^{-1}.
b) Calcula A^2, A^3 **y** A^{100}.

Solución

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

28º) Considérese la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcúlese $(A \cdot A^t)^{200}$
b) Calcúlese $(A \cdot A^t - 3I)^{-1}$

Solución

a) $(A \cdot A^t)^{200} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *b)* $(A \cdot A^t - 3I)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

28) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 2 & 4 & 1 \\ m & 2 & -1 \end{pmatrix}\ y\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide:
a) Determinar el rango de B **en función de los valores de** m.
b) Calcular la matriz inversa de A **y comprobar que verifica** $A^{-1} = \frac{1}{5}(A^2 + 3C)$.

EvAU Madrid. Modelo 2016-017

Solución

a) $m = \frac{1}{2} \Longrightarrow rg(B) = 2 \qquad m \neq 1/2 \Longrightarrow rg(B) = 3$

29º) Demuestra, sin desarrollar, que el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix}$ **es múltiplo de** 15.

30º) Demuestra, sin desarrollar, que el determinante $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix}$ **es divisible por** $x - 1$.

31º) Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 2(x^2-1) & x+1 & (x+1)^2 \\ x-1 & x+1 & x+1 \\ (x-1)^2 & x-1 & x^2-1 \end{vmatrix} = 0$$

[Solución: $x = 0\,; x = 1\,; x = -1$}