EVAU 2019. MADRID.

JUNIO: OPCIÓN A.

① $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \quad rg\, A \geq 2$ $\forall a \in \mathbb{R}$.

a) Calculo el menor de orden 3, de la matriz A, siguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & a & 2 \\ -1 & 2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & a-3 & -2 \\ 0 & 2+3 & a+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-3 & -2 \\ 5 & a+4 \end{vmatrix} = a^2+a-2$$

$a^2+a-2=0 \iff \begin{cases} a=1 \\ a=-2 \end{cases}$

<u>Caso 1</u> $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1, a \neq -2$, $rg\, A = 3$

<u>Caso 2</u> $a=1$. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow rg\, A \geq 2$.

Orlamos el menor anterior con tercera fila y cuarta columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Así, } rg\, A = 2.$$

<u>Caso 3</u> $a=-2$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow rg\, A \geq 2$.

Orlamos el menor con tercera fila y cuarta columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 14 & 0 \end{vmatrix} = 20 \neq 0 \quad \text{Así, } rg\, A = 3.$$

Por tanto:

- $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$ se tiene $rg\, A = 3$.
- $a=1$, $rg\, A = 2$.

b) $a=0$. $A \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ La matriz $P = A \cdot M$ tiene inversa.

$P_{11}=-4$, $P_{12}=0$, $P_{13}=2$, $P_{21}=8$, $P_{22}=-1$, $P_{23}=-5$, $P_{31}=6$, $P_{32}=-1$, $P_{33}=-3$.

$$P^{-1}=(AM)^{-1}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 8 & 6 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 5/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

② $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$ $\quad x>0.$

a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}\text{ L'Hôp}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. La recta $y=0$ es asíntota horizontal.

b) Punto de recta tangente horizontal.

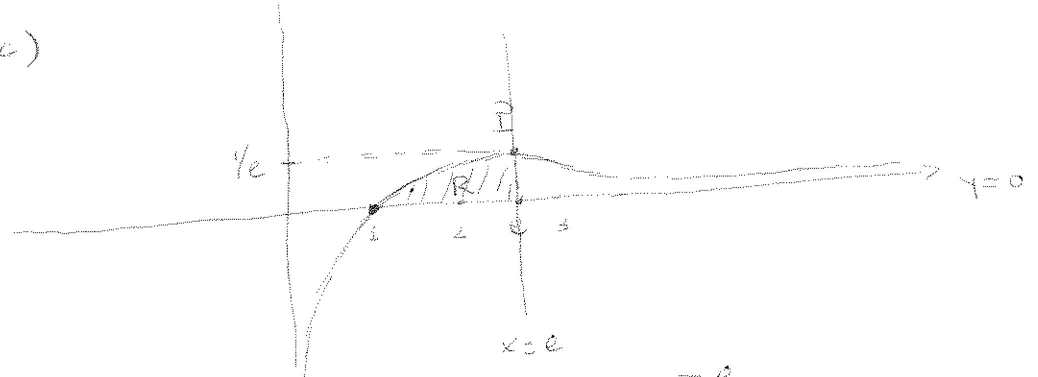
$f'(x)=\frac{1-\ln(x)}{x^2}$, $\quad f'(x)=0 \iff 1-\ln(x)=0 \iff x=e.$

El punto $P(e,\frac{1}{e})$ tiene recta tangente horizontal porque $f'(e)=0$.

$$f''(x)=\frac{-x-(1-\ln(x))\,2x}{x^4}=\frac{-1+2\ln(x)-2}{x^3}=\frac{2\ln(x)-3}{x^3}.$$

$f''(e)=\frac{-1}{e^3}<0$ En el punto $P(e,\frac{1}{e})$ la función tiene un máximo relativo.

c)



$$\text{Área}(R)=\int_1^e \ln(x)\,\frac{1}{x}\,dx=\left[\frac{\ln^2(x)}{2}\right]_1^e=\frac{\ln^2(e)}{2}-\frac{\ln^2(1)}{2}=\boxed{\frac{1}{2}\,u^2}$$

③ $r\equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-2}=z$; $\quad s\begin{cases}A(2,-5,1)\\ \vec{v}=(-1,0,-1)\end{cases}$

$B\in r \quad B(1,3,1)$

$\vec{u}=(2,-2,1)$

a) $rg\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}=2$ porque $\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & -2\end{vmatrix}=2\neq 0$ Se cortan ó se cruzan.

$\vec{AB}=(-1,8,0)$

$$rg(\vec{AB},\vec{u},\vec{v})=rg\begin{pmatrix}-1 & 8 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}=3 \text{ porque } \begin{vmatrix}-1 & 8 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 8 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}=-6\neq 0$$

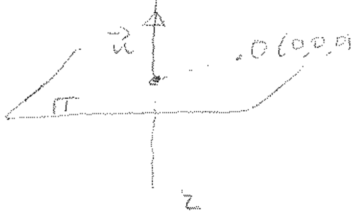
Las rectas r y s se cruzan.

b) $\pi \parallel r$ y $\pi \supset s$. $\quad \pi(A,\vec{u},\vec{v})$

$$\pi\equiv\begin{vmatrix}x-2 & y+5 & z-1\\ 2 & -2 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{vmatrix}=0 \iff 2(x-2)+y+5-2(z-1)=0$$

$$\pi\equiv \boxed{2x+y-2z+3=0}$$

c) $\pi \perp r$, $O \in \pi$ $\quad \vec{u} = \vec{n}_{\pi}$



$\pi \equiv 2x - 2y + z + D = 0$

$O \in \pi \Rightarrow D = 0.$

$\pi \equiv \boxed{2x - 2y + z = 0}$

4 A = "Un pez, de una cierta especie, sobrevive más de 5 años"

$p(A) = 0'1$

Sea X la variable aleatoria X = "nº peces, de esa especie, que sobreviven más de 5 años"

a) $n = 10$

$X \sim B(10, 0'1)$ binomial.

$p(X \geq 2) = 1 - p(X=0) - p(X=1) = 1 - \binom{10}{0} 0'9^{10} - \binom{10}{1} 0'1 \cdot 0'9^{9} =$

$= 1 - 0'9^{10} - 10 \cdot 0'1 \; 0'9^{9}$

b) $n = 200$, $X \sim B(200, 0'1) \sim N(20, \sqrt{18}) = N(20, 4{,}24)$

$np(1-p) = 200 \cdot 0'1 \; 0'9 = 18$ $\quad Z \sim N(0,1)$

$p(X \geq 10) = 1 - p(X < 10) = 1 - p\left(Z < \frac{10-20}{4'24}\right) = 1 - p(Z < -2'36) =$

$= 1 - \left(1 - p(Z \leq 2'36)\right) = p(Z \leq 2'36) = 0'9909.$