1º] Dado el siguiente sistema dependiente del parámetro k:

$$\begin{cases} kx - 2y + 7z = 8 \\ x \quad - y \ + kz = 2 \\ -x \ + y \ \ + z = 2 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de k.
b) Resuélvase el sistema en el caso $k = 2$.

Resolución

a) Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A = \begin{pmatrix} k & -2 & 7 \\ 1 & -1 & k \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz ampliada con la columna de términos independientes: $A^* = \begin{pmatrix} k & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & k & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} k & -2 & 7 \\ 1 & -1 & k \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -k + 2k + 7 - 7 + 2 - k^2 = -k^2 + k + 2$$

$|A| = 0 \iff \begin{cases} k = -1 \\ k = 2 \end{cases}$

Caso 1 $\forall k \in \mathbb{R}$ $k \neq -1$ y $k \neq 2$. $|A| \neq 0$. Por tanto $rg(A) = 3 = rg(A^*) = nº\ incógnitas$

$$Sistema\ Compatible\ Determinado\ (Solución\ única)$$

Caso 2 $k = -1$. En este caso $|A| = 0$ y $rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Calculemos el rango de la matriz A:

Como $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$, $rg(A^*) \geq 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 8 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$. Por tanto $rg(A^*) = 3$.

$$2 = rg(A) \neq rg(A^*) = 3\text{:}\ Sistema\ Incompatible\ (No\ tiene\ solución)$$

Caso 3 $k = 2$. En este caso $|A| = 0$ y $rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 7 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y, por tanto, $rg(A) = 2$ y $rg(A^*) \geq 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor que nos ha dado el rango de A, con la primera fila y cuarta columna de A^* :

$\begin{vmatrix} -2 & 7 & 8 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ =0. Por tanto $rg(A^*) = 2$

$rg(A) = rg(A^*) = 2$
$$< nº\ incógnitas:\ Sistema\ Compatible\ Indeterminado\ (Infinitas\ Soluciones)$$

b) Resolvemos para $k = 2$.

Observando el menor $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, el sistema equivalente viene dado por las ecuaciones cuyos coeficientes forman parte de dicho menor, esto es $\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ -x \ + y \ + z = 2 \end{cases}$

Las incógnitas principales del sistema son aquellas cuyos coeficientes forman parte de las columnas del menor $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, es decir y , z. La incógnita x actúa como incógnita no principal o parámetro. Así tenemos:

$x = t;\quad \begin{cases} -y + 2z = 2 - t \\ y + z = 2 + t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$, de donde $z = \frac{4}{3}$; $y = \frac{2}{3} + t$

La solución viene dada por $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{2}{3} + t \\ z = \frac{4}{3} \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$

2] Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ a & 0 & 8 \\ -1 & a & -6 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Determina para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la matriz A tiene inversa.
b) Calcula A^{-1} para $a = 0$
c) Para $a = 0$, resuelve la ecuación $A \cdot X = B$

Resolución

a) Calculamos el determinante de la matriz A: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ a & 0 & 8 \\ -1 & a & -6 \end{vmatrix} = a^2 + 10a - 24$

Vemos qué valores anulan el determinante: $a^2 + 10a - 24 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} a = -12 \\ a = 2 \end{cases}$

Por lo tanto A *es* invertible $\forall a \in \mathbb{R} - \{-12, 2\}$.

b) $a = 0$. En este caso la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ y su determinante $|A| = -24$

Los adjuntos son:
$A_{11} = 0;\ A_{12} = -8;\ A_{13} = 0\ ; A_{21} = 18\ ; A_{22} = -5\ ; A_{23} = -3\ ;\ A_{31} = 24\ ; A_{32} = -8\ ; A_{33} = 0$

La matriz inversa es: $A^{-1} = \frac{-1}{24}\begin{pmatrix} 0 & 18 & 24 \\ -8 & -5 & -8 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

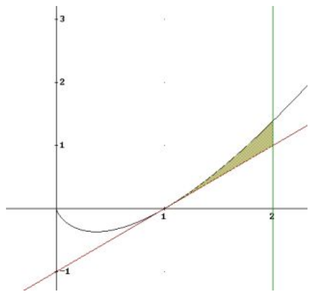
c) Para $a = 0,\ X = A^{-1} \cdot B = \frac{-1}{24}\begin{pmatrix} 0 & 18 & 24 \\ -8 & -5 & -8 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{24}\begin{pmatrix} 24 \\ -16 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

3] Considera la función $f(x) = x \cdot lnx$. Determina:
a) su dominio, ceros y extremos.
b) el área de la región plana limitada por la gráfica de esa función, su recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$ y la recta $x = 2$.

Resolución

a) $Dom(f) = (0, +\infty)$; $x \cdot lnx = 0 \Longrightarrow lnx = 0 \Longrightarrow x = 1$ cero de la función.
$f'(x) = lnx + 1\ ; f'(x) = 0 \Leftrightarrow lnx + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e};\ f''(x) = \frac{1}{x}\ ;\ f''\left(\frac{1}{e}\right) = e > 0$

Mínimo relativo en el punto $P\left(\frac{1}{e}, \frac{-1}{e}\right)$



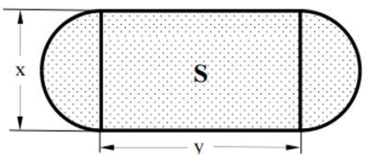
b) Recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$: $f(1) = 0$; $f'(1) = 1$;
$t \equiv y = x - 1$

$$Área = \int_1^2 (xlnx - x + 1)dx = \left[\frac{x^2}{2}\left(lnx - \frac{3}{2}\right) + x\right]_1^2 = 2ln2 - \frac{5}{4}\ u$$

$$\int xlnx\ dx = \frac{x^2}{2} lnx - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2}\left(lnx - \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{matrix} u = lnx \\ dv = xdx \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} du = \frac{1}{x} \\ v = \int dv = \int x\, dx = \frac{x^2}{2} \end{matrix}$$

4º] Se dispone de 200 metros de tela metálica y se desea vallar un recinto formado por un rectángulo y dos semicírculos, como indica la figura. Determina las dimensiones de x e y para que el área sea máxima.



Resolución

Sean x e y las longitudes del ancho y largo del rectángulo respectivamente . La suma de las longitudes de los dos semicírculos es $2\pi\frac{x}{2} = \pi x$ m

Planteamiento del problema: $\left[\begin{matrix} maximizar\ \ A(x,y) = x \cdot y + \frac{\pi x^2}{4} & función\ objetivo \\ s.a \qquad (2+\pi)x + 2y = 200 & restricción \end{matrix}\right.$

Despejando de la restricción tenemos: $y = \frac{200-(2+\pi)x}{2}$ [1] y sustituyendo en la función objetivo:

$A(x) = x \cdot \frac{200-(2+\pi)x}{2} + \frac{\pi x^2}{4} = \frac{400x-(4+2\pi)x^2}{4}$ que es la función área dependiente de una sola variable.

Buscamos el máximo de la función $A(x)$:

$A'(x) = \frac{1}{4}(400 - (8+4\pi)x)$; $A'(x) = 0 \iff\iff x = \frac{100}{2+\pi} m$

Comprobamos que, efectivamente, el valor $x = \frac{100}{2+\pi}$ es máximo de la función área $A(x)$:

$A''(x) = -2 - \pi$; $A''\left(\frac{100}{2+\pi}\right) = -2 - \pi < 0$ Máximo en $x = \frac{100}{2+\pi}\ m$

Sustituyendo en [1] obtenemos $y = \frac{200-(2+\pi)\cdot\frac{100}{2+\pi}}{2} = 50\ m$

5º)

a) Probar que la ecuación $x^5 + 2x = 4$ tiene exactamente una solución real.

b) Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - cosx}{sen^2x}$

c) Halla una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = \frac{x^3+x-1}{x^2+x}$ tal que $F(1) = 0$

Resolución

a) Sea $f(x) = x^5 + 2x - 4$ continua en el conjunto de los números reales por ser polinómica .

$$\left.\begin{matrix} f(x)\ continua\ en\ [1,2] \\ f(1) = -1 < 0 \\ f(2) = 32 > 0 \end{matrix}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Rightarrow} \exists c \in (1,2)\ tal\ que\ f(c) = 0 \Leftrightarrow c^5 + 2c - 4 = 0 \Leftrightarrow c^5 + 2c = 4$$

Así c es raíz de la ecuación $x^5 + 2x = 4$.

Como $f'(x) = 5x^4 + 2 > 0$, la función f es creciente y, en consecuencia, no puede terne más ceros .

b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - cosx}{sen^2x} \overset{\frac{0}{0} L`Hôp}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + senx}{2senxcosx} \overset{\frac{0}{0} L`Hôp}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + cosx}{2(cos^2x - sen^2x)} = \frac{2}{2} = 1$

c) $F(x) = \int \frac{x^3+x-1}{x^2+x} dx = \int (x-1)dx + \int \frac{2x-1}{x^2+x}\ dx = \frac{x^2}{2} - x + I_1$

$$I_1 = \int \frac{2x-1}{x^2+x}\,dx = \int \frac{2x-2}{x(x+1)}\,dx =$$

Descomponemos el integrando en suma de fracciones simples:

$$\frac{2x-1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)}$$

$$2x-2 = A\cdot(x+1) + Bx$$

Sustituyendo $x=0$ y $x=-1$ obtenemos $\begin{cases} -1 = A \\ -3 = -B \end{cases}$ de donde $A=-1$ y $B=3$

Por tanto:

$I_1 = \int \frac{2x-2}{x^2+x}\,dx = \int \frac{2x-2}{x(x+1)}\,dx = \int \frac{-1}{x}\,dx + \int \frac{3}{x+1}\,dx = -L|x| + 3L|x+1| + c_1$

Así

$$F(x) = \int \frac{x^3+x-1}{x^2+x}dx = \frac{x^2}{2} - x - L|x| + 3L|x+1| + c$$

$$F(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - 1 + 3L2 + c = 0 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2} - 3L2$$

La primitiva que buscamos es $F(x) = \frac{x^2}{2} - x - L|x| + 3L|x+1| + \frac{1}{2} - 3L2$

6º] Una persona cuida de su jardín, pero es bastante descuidada y se olvida de regarlo dos de cada tres días. El jardín no está en muy buenas condiciones, así que si se riega tiene la misma probabilidad de progresar que de estropearse, pero la probabilidad de que progrese si no se riega es de 0,25.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el jardín progrese?

b) Si el jardín se ha estropeado, ¿cuál es la probabilidad de que la persona olvidara regarlo?

Resolución

Consideramos los sucesos siguientes:

$P = $ " *El jardín progresa*"

$R = $ "*El jardín ha sido regado*"

Del enunciado, $p(R) = \frac{1}{3}$; $p(\bar{R}) = \frac{2}{3}$ $p(P|R) = p(\bar{P}|R) = 0{,}5$; $p(P|\bar{\bar{R}}) = 0{,}25$; $p(\bar{P}|\bar{\bar{R}}) = 0{,}75$

a) $p(P) \overset{P.Total}{\triangleq} p(R)\cdot p(P|R) + p(\bar{R})\cdot p(P|\bar{R}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{3}$

b) $p(\bar{R}|\bar{P}) \overset{T.Bayes}{\triangleq} \frac{p(\bar{R}\cap\bar{P})}{p(\bar{P})} = \frac{p(\bar{R})\cdot p(\bar{P}|\bar{R})}{1-p(P)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$

7º] La probabilidad de que deje de fumar un paciente, que se ha sometido a un régimen médico riguroso, es de 0,8. Se eligen 100 pacientes, que se han sometido a dicho régimen. Considera la variable aleatoria $X = $ *"número de personas que dejan de fumar"*

Utilizando la aproximación de la binomial por la normal, calcula:

a) La probabilidad de que hayan dejado de fumar entre 74 **y** 85 **pacientes, no incluidos.**

b) La probabilidad de que dejen de fumar al menos 75 personas.

Resolución

Definimos la variable $X = $ "Número de pacientes que dejan de fumar"; $X \to B(100{,}0'8)$

Como $n\cdot p = 80 > 10$ y $\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)} = 4$, se puede aproximar $X \to N(80, 4)$

a) $p(74 < X < 85) =^{Tipificamos} = p\left(\frac{74-80}{4} < Z < \frac{85-80}{4}\right) = p(-1{,}5 < Z < 1{,}25) =$

$$= p(Z < 1{,}25) - \big(1 - p(Z < 1{,}5)\big) = 0{,}8944 - 1 + 0{,}9332 = 0{,}8276$$

b) $p(X \geq 75) = 1 - p(X < 75) =^{Tificamos}= 1 - p\left(Z < \frac{75-80}{4}\right) = 1 - p(Z < -1{,}25) = p(Z \leq 1{,}25) = 0{,}8944$

8º] Dado el punto $P(3, 5, -1)$, la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y + 2 = \frac{z+1}{4}$ y el plano $\pi \equiv 3x - 2y + z - 5 = 0$, se pide determinar:

a) el punto Q de r tal que el vector de extremos P y Q es paralelo al plano π.

b) la ecuación del plano π' que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

c) el ángulo que forman la recta r y el plano π.

Resolución

a) Punto genérico de la recta r: $Q(1 + 2t, -2 + t, -1 + 4t)$; Vector $\overrightarrow{PQ} = (2t - 2, t - 7, 4t)$

Vector normal del plano $\vec{n} = (3, -2, 1)$

Imponiendo la condición pedida: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \Leftrightarrow 6t - 6 - 2t + 14 + 4t = 0 \Leftrightarrow 8t = -8 \Leftrightarrow t = -1$

El punto buscado es $Q(-1, -3, -5)$

b) El plano buscado tendrá la dirección de la recta $\vec{v} = (2, 1, 4)$, pasará por un punto de ella $R(1, -2, -1)$ y tendrá la dirección de $\vec{n} = (3, -2, 1)$:

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 9(x-1) + 10(y+2) - 7(z+1) = 0$$

$$\pi' \equiv 9x + 10y - 7z + 4 = 0$$

c)

$$sen(\widehat{r,\pi}) = \cos(\widehat{\vec{n},\vec{v}}) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|6 - 2 + 4|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{21}} = \frac{8}{\sqrt{294}} \cong 0{,}46657 \Longrightarrow (\widehat{r,\pi}) = 30{,}9°$$