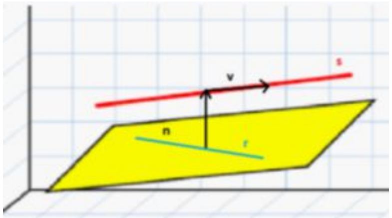
1º) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ **y es paralelo a la recta s**$\equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Resolución

1ª Forma

El plano que buscamos será uno del haz de planos que contiene a la recta r:

$$x - y + z + 1 + \lambda \cdot (x + 2y + z) = 0$$
$$\Leftrightarrow (1 + \lambda)x + (2\lambda - 1)y + (1 + \lambda)z + 1 = 0$$



Obligamos a que el plano del haz sea paralelo a la recta s; para ello, el producto escalar del vector normal del plano y el director de s tiene que ser cero:

$$\vec{n} = (1 + \lambda, 2\lambda - 1, 1 + \lambda)\ ;\ \vec{v_s} = (-1, 0, 2)$$
$$\vec{n} \cdot \vec{v_r} = -(1 + \lambda) + 2 \cdot (1 + \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$$

El plano que nos piden es $x - y + z + 1 - (x + 2y + z) = 0$ y, simplificando, obtenemos la ecuación: $\pi \equiv 3y - 1 = 0$

2ª Forma

También podemos obtener la dirección de la recta r, un punto de ella y la dirección de s. El plano que buscamos estará determinado por los vectores directores de las dos rectas y por el punto de r.

Vector director de la recta r: $\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k} = (-3, 0, 3)$. Tomo $\vec{u} = (1, 0, -1)$

Punto de r: $z = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ de donde $x = -\frac{2}{3}$; $y = \frac{1}{3}$. $P\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$

Así $\pi' \equiv \begin{vmatrix} x + \frac{2}{3} & y - \frac{1}{3} & z \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi' \equiv -y + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \pi' \equiv 3y - 1 = 0$

2º) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = -1 + t \end{cases}$ **y** $s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = z$ **se pide hallar:**

a) Su posición relativa .

b) La distancia entre r y s.

Resolución

a) Un punto y vector director de $r(A, \vec{u})$ son $A(1, 0, -1)$ y $\vec{u} = (2, 3, 1)$

Un punto y vector director de $s(B, \vec{v})$ son $B(0, 1, 0)$ y $\vec{v} = (2, -1, 1)$. $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 1)$

Las rectas se cruzan porque $rg\left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right) = 3$ al ser $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$

b) Aplicando la fórmula de distancia entre dos rectas que se cruzan $d(r, s) = \frac{\left|[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]\right|}{|\vec{u} \wedge \vec{v}|}$:

$\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 1)$; $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4\vec{\imath} - 8\vec{k} = (4, 0, -8)$

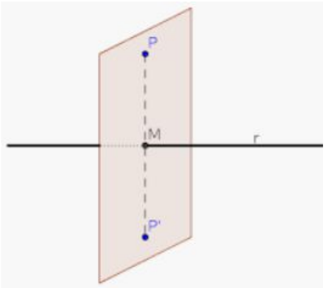
$$d(r,s) = \frac{|[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}]|}{|\vec{u}\wedge\vec{v}|} = \frac{\left\| \begin{matrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{matrix} \right\|}{\sqrt{4^2+(-8)^2}} = \frac{12}{\sqrt{80}} = \frac{12}{4\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}\ \text{u}$$

3º) Halla el simétrico del punto $P(2,-1,3)$ respecto de la recta $r \equiv \begin{cases} x+2y-2=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}$ y la distancia del punto P a la recta r.

Resolución

(a) Plano π perpendicular a la recta r que pasa por el punto P:

Vector director $\vec{v}$ de la recta r: $\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + k = (2,-1,1)$; Punto de r: $A(0,1,0)$



El vector director de la recta r será el normal del plano π: $\vec{n} = \vec{v} = (2,-1,1)$.

Por tanto, $\pi \equiv 2x - y + z + D = 0$

$P \in \pi \Leftrightarrow 4 + 1 + 3 + D = 0$, de donde $D = -8$

Así $\pi \equiv 2x - y + z - 8 = 0$

(b) Intersección recta y plano: $M = r \cap \pi$

$$\begin{cases} \pi \equiv 2x - y + z - 8 = 0 \Rightarrow 4t - 1 + t + t - 8 = 0 \Rightarrow 6t = 9 \Rightarrow t = \dfrac{3}{2} \\ r \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \overset{t=\frac{3}{2}}{\Longleftrightarrow} \quad M\left(3, \dfrac{-1}{2}, \dfrac{3}{2}\right) \end{cases}$$

(c) El punto M es medio entre P y su simétrico $P'(x,y,z)$.

$$\frac{x+2}{2} = 3 \Longrightarrow x = 4\,;\ \frac{y-1}{2} = \frac{-1}{2} \Longrightarrow y = 0\,;\ \frac{z+3}{2} = \frac{3}{2} \Longrightarrow z = 0$$

El simétrico del punto P respecto de la recta r es el punto $P'(4,0,0)$

La distancia de P a r será $d(P,r) = d(P,M) = |\overrightarrow{PM}| = \sqrt{(3-2)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}\ u$

4º) Dados los puntos $A(1,0,-1)$ y $B(2,-1,3)$, la recta $r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-3}{-1}$ y el plano $\pi \equiv 2x - y - 1 = 0$, se pide:

a) encontrar los puntos P y Q de la recta r que distan $\sqrt{5}$ unidades del plano π.

b) calcular el área del triángulo de vértices A, B y P, siendo P el punto de abscisa positiva.

Resolución

a) Punto genérico de la recta r: $P(-3+2t, -4+3t, 3-t)$

$$d(P,\pi) = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|-6+4t+4-3t-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|t-3|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \begin{cases} t-3 = 5 \Leftrightarrow t = 8 \\ t-3 = -5 \Leftrightarrow t = -2 \end{cases}$$

$$\text{Los puntos son } \begin{cases} t = 8 \Rightarrow P(13,\ 20,-5) \\ t = -2 \Rightarrow Q(-7,-10,\ 5) \end{cases}$$

b) $\overrightarrow{AB} = (1,-1,4)$; $\overrightarrow{AP} = (12,20,-4)$; $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 4 \\ 12 & 20 & -4 \end{vmatrix} = -76\vec{\imath} + 52\vec{\jmath} + 32\vec{k}$

$$ÁreadelTriáng(A,B,P) = \frac{|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AP}|}{2} = \frac{\sqrt{76^2+52^2+32^2}}{2} = \frac{\sqrt{9504}}{2} = \sqrt{2376} = 6\sqrt{66}\, u^2$$

5�) Dada la recta $r \equiv \begin{cases} 3x - y \quad + 3 = 0 \\ x \quad - z + 2 = 0 \end{cases}$ **y los planos** $\pi \equiv x - y = 4, \pi' \equiv x - y + z = 4$

a) Determina la posici� relativa de r y π .
b) Halla el �gulo que forman r y π.
c) Calcula el volumen del tetraedro determinado por el plano π' y los tres ejes coordenados.
d) Recta sim�rica de la recta r respecto del plano π.

Resoluci�

a)

1�Forma

Consideramos el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x - y \quad = -3 \\ x \quad - z = -2 \\ x - y \quad = 4 \end{cases}$

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ se tiene que $rg(A) = 3 = rg(A^*) = nº\ incógnitas$. Soluci�n �ica .

La recta y el plano se cortan en un punto

2�Forma

Vector director de la recta, $\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} = (1,3,1)$. Vector normal del plano, $\vec{n} = (1,-1,0)$. Como $\vec{n} \cdot \vec{u} = -2 \neq 0$, la recta y el plano se cortan en un punto.

b) Sea $\vec{n} = (1,-1,0)$ vector normal del plano y $\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} = (1,3,1)$ vector de direcci�n de la recta.

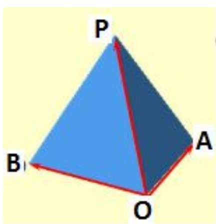
$$sen(\widehat{r,\pi}) = |\cos(\widehat{\vec{n},\vec{u}})| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{|1-3|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{11}} = \frac{\sqrt{22}}{11} \cong 0{,}4264 \Longrightarrow (\widehat{r,\pi}) = 25{,}24°$$

c) Los ejes coordenados son: Eje OX: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$; Eje OY: $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$; Eje OZ: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Puntos A, B y C de intersecci�n de los ejes OX, OY y OZ con el plano $\pi \equiv x - y + z = 4$:

$\begin{cases} x - y + z = 4 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Longrightarrow A(4,0,0)$; $\begin{cases} x - y + z = 4 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Longrightarrow B(0,-4,0)$; $\begin{cases} x - y + z = 4 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow C(0,0,4)$

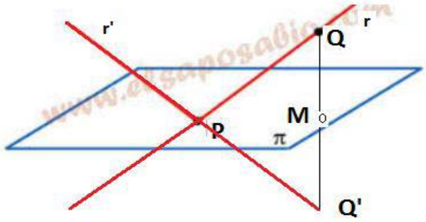
Tetraedro determinado por los puntos $O(0,0,0), A(4,0,0), B(0,-4,0)$ y $C(0,0,4)$.



$$V = \frac{1}{6}\left|\left|\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right|\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}\right| = \frac{64}{6} = \frac{32}{3}\, u^3$$

d) Punto P de intersección de la recta y el plano: $\begin{cases} 3x - y \quad = -3 \\ x \quad - z = -2 \\ x - y \quad = 4 \end{cases}$

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-2} = -\frac{7}{2}$; $\quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{-2} = -\frac{15}{2}$; $\quad z = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{-2} = -\frac{3}{2}$; $P\left(\frac{-7}{2}, \frac{-15}{2}, \frac{-3}{2}\right)$



Tomo un punto Q de la recta r: $x = 0 \Longrightarrow y = 3$; $z = 2$; $Q(0,3,2)$ y busco su simétrico Q' respecto del plano π . Para ello, hallo la recta s perpendicular al plano π que pasa por el punto Q que tendrá la dirección del vector normal del plano π, esto es $\vec{n} = (1,-1,0)$:

$$s \equiv \begin{cases} x = \quad t \\ y = 3 - t \\ z = 2 \end{cases}$$

Intersección Mde la recta s y el plano π: $\begin{cases} x = \quad t \\ y = 3 - t \\ z = 2 \\ x - y = 4 \end{cases} \Longleftrightarrow t - (3 - t) = 4 \Longleftrightarrow 2t = 7 \Longleftrightarrow t = \frac{7}{2}$

El punto de intersección es $M\left(\frac{7}{2}, \frac{-1}{2}, 2\right)$ y es medio entre $Q(0,3,2)$ y su simétrico $Q'(x,y,z)$.
Por tanto, $\frac{x}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow x = 7$; $\frac{y+3}{2} = \frac{-1}{2} \Rightarrow y = -4$; $\frac{z+2}{2} = 2 \Rightarrow z = 2$ y $Q'(7,-4,2)$.
La recta r', simétrica de la recta r respecto del plano π, pasa por los puntos P y Q'.
Tomamos como vector director $\overrightarrow{PQ'} = \left(\frac{21}{2}, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$, o mejor aún $\frac{2}{7}\overrightarrow{PQ'} = (3,1,1)$
La recta r' simétrica de r respecto del plano π es:

$$r' \equiv \frac{x-7}{3} = y + 4 = z - 2$$

Puntuación
1 ---------- 1 puntos
2, 3 ------- 1,5 “
4 ---------- 2 “
5 ---------- 4 “