1�) Dada la funci�n $f(x)=\begin{cases}\frac{1-x}{e^x} & si\ \ x<0\\ x^2+ax+b & si\ x\geq 0\end{cases}$

a) Calcula los valores de a y b para que la funci�n sea derivable en $x=0$.

b) Calcula la ecuaci�n de la recta tangente a la funci�n en el punto de abscisa $x=-1$.

Resoluci�n

a) Continuidad en $x=0$

1�) $f(0)=b$

2�) $\lim\limits_{x\to} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1-x}{e^x}=1\\ \lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+ax+b)=b\end{cases}$ de donde $b=1$ para que sea continua.

Derivabilidad en $x=0$

$$f'(x)=\begin{cases}(x-2)e^{-x} & si\ \ x<0\\ 2x+a & si\ x>0\end{cases}$$

$$-2=f'(0)^-=f'(0)^+=a\ \ ;\ \text{de donde } a=-2$$

b) $f(-1)=2e\ \ ;\ f'(-1)=-3e$

La ecuaci� es $y-2e=-3e(x+1)$

2�) Dada la funci�n $f(x)=\frac{x^2+8}{x-1}$, se pide:

a) Estudia su continuidad y determina todas sus as�ntotas.

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus extremos relativos.

c) Calcula $\int_3^5 f(x)dx$

Resoluci�n

a) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$ por ser racional

$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2+8}{x-1}\overset{\frac{9}{0^-}}{=}-\infty\ \ ;\ \ \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2+8}{x-1}\overset{\frac{9}{0^+}}{=}+\infty$ La recta $x=1$ es as�tota vertical

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+8}{x-1}=\pm\infty$ No tiene as�totas horizontales

As�tota oblicua: $y=mx+n$

$m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2+8}{x-1}}{x}=1$; $n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+8}{x-1}-x\right)=$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x+8}{x-1}=1$; $y=x+1$ es as�tota oblicua.

b) Monoton� : $f'(x)=\frac{2x\cdot(x-1)-(x^2+8)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-8}{(x+1)^2}$; $\begin{cases}x^2-2x-8=0\Longrightarrow x=4; x=-2\\ (x-1)^2\Longrightarrow x=1\end{cases}$

Signo de f'	$(-\infty,-2)$	$(-2,1)$	$(1,4)$	$(4,+\infty)$
	$+$	$-$	$-$	$+$

$$f(x)\ crece\ en\ (-\infty,-52)\cup(4,+\infty)\ ;\ \ f(x)\ decrece\ en\ (-2,-1)\cup(1,4)$$

M�imo relativo en $P(-2,-4)$. M�imo relativo en $Q(4,8)$

c) $\int_3^5 f(x)dx=\int_3^5\frac{x^2+8}{x-1}dx=\int_3^5(x+1)\,dx+\int_3^5\frac{9}{x-1}dx=\left[\frac{x^2}{2}+x+9L|x-1|\right]_3^5=10+9L8$

3º) Calcula

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\cos(2\pi x)}{(x-1)^2}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt[x]{e^x+x-1}$

Resolución

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\cos(2\pi x)}{(x-1)^2}\overset{\frac{0}{0}L'Hôp}{\cong}\lim\limits_{x\to 1}\frac{2\pi sen(2\pi x)}{2(x-1)}\overset{\frac{0}{0}L'Hôp}{\cong}\lim\limits_{x\to 1}\frac{4\pi^2 cos(2\pi x)}{2}\overset{\frac{0}{0}L'Hôp}{\cong}\frac{4\pi^2}{2}=2\pi^2$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt[x]{e^x+x-1}=\lim\limits_{x\to +\infty}(e^x+x-1)^{\frac{1}{x}}\overset{+\infty^0}{\cong}$

$ln\left(\lim\limits_{x\to +\infty}(e^x+x-1)^{\frac{1}{x}}\right)$

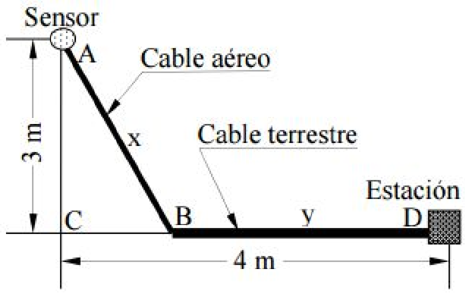
$$=\lim_{x\to +\infty} ln\,(e^x+x-1)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot ln(e^x+x-1)\right)\overset{0.\infty}{\cong}\lim_{x\to +\infty}\frac{ln(e^x+x-1)}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty},L`Hôp}{\cong}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x+1}{e^x+x-1}\overset{L`Hôp}{\cong}\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{e^x+1}\overset{L`Hôp}{\cong}\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$$

Así $ln\left(\lim\limits_{x\to +\infty}(e^x+x-1)^{\frac{1}{x}}\right)=1$, de donde $\lim\limits_{x\to +\infty}(e^x+x-1)^{\frac{1}{x}}=e$

4º) Un poste de 3 metros de altura tiene en su punta un sensor que recoge datos meteorológicos. Dichos datos deben transmitirse a través de un cable a una estación de almacenamiento situada a 4 metros de la base del poste. El cable puede ser aéreo o terrestre, según vaya por el aire o por el suelo (véase figura). El coste del cable es distinto según sea aéreo o terrestre. El metro de cable aéreo cuesta 3.000 euros y el metro de cable terrestre cuesta 1.000 euros. ¿Qué parte del cable debe ser aéreo y qué parte terrestre para que su coste sea mínimo?



Resolución

Sean x e y las longitudes en metros de los cables, aéreo y terrestre, respectivamente.

El precio total del cable es $P(x,y)=3000x+1000y=1000(3x+y)$

Por otro lado, $3^2+(4-y)^2=x^2$, esto es $4-y=\sqrt{x^2-9}$; así $y=4-\sqrt{x^2-9}$

Sustituyendo en la función precio tenemos:

$$P(x)=1000\left(3x+4-\sqrt{x^2-9}\right)\text{ minimizar}$$

Derivando, $P'(x)=1000\left(3-\frac{2x}{2\sqrt{x^2-9}}\right)=1000\left(3-\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}\right)$

Buscamos posible mínimo : $P'(x)=0\Leftrightarrow 3-\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}=0\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}=3\Leftrightarrow 9(x^2-9)=x^2\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 8x^2=81\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{81}{8}}=\frac{9\sqrt{2}}{4}\approx 3{,}18\text{ metros de cable aéreo}$$

Como $P'(3{,}1)<0$ y $P'(3{,}2)>0$, hemos encontrado un mínimo.

$$y=4-\sqrt{x^2-9}\overset{x=\frac{9\sqrt{2}}{4}}{\cong}\frac{16-3\sqrt{2}}{4}\approx 2{,}94\text{ metros de cable terrestre}$$

5º) Calcula la primitiva $F(x)$ de la función $f(x)=\frac{4x}{3\sqrt{2+3x^2}}$ tal que $F(0)=1$.

Resolución

La primitiva que buscamos estará en su integral indefinida:

$$F(x)=\int \frac{4x}{3\sqrt{2+3x^2}}\,dx=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{6}\int \frac{6x}{\sqrt{2+3x^2}}\,dx \overset{\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx}{\triangleq} \frac{4}{9}\cdot\sqrt{2+3x^2}+c$$

$$F(0)=1 \Leftrightarrow \frac{4}{9}\sqrt{2}+c=1 \Leftrightarrow c=1-\frac{4}{9}\sqrt{2}$$

La primitiva es $F(x)=\frac{4}{9}\cdot\sqrt{2+3x^2}+1-\frac{4}{9}\sqrt{2}$

6º) Calcula las siguientes integrales:

a) $\int x\cdot e^{7x}dx$ **b)** $\int \frac{2x+3}{x^2+7}\,dx$ **c)** $\int \frac{x-1}{(x+2)^2}\,dx$

Resolución

a)

$$I=\int xe^{7x}\,dx \quad \begin{matrix} u=x \\ dv=e^{7x}\,dx \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} du=dx \\ v=\int dv=\int e^{7x}\,dx=\frac{e^{7x}}{7} \end{matrix}$$

Así aplicando la fórmula de integración por partes, obtenemos la integral

$$I=\int xe^{7x}\,dx=\frac{xe^{7x}}{7}+\int\frac{e^{7x}}{7}=\frac{xe^{7x}}{7}-\frac{e^{7x}}{49}+c=\frac{e^{7x}}{7}\left(x-\frac{1}{7}\right)+c$$

b) $\int \frac{2x+3}{x^2+7}\,dx=\int\frac{2x}{x^2+7}\,dx+\int\frac{3}{7+x^2}\,dx=L|x^2+7|+3\cdot\int\frac{\frac{1}{7}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2}\,dx=$

$$=L|x^2+7|+\frac{3\sqrt{7}}{7}actg\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)+c$$

c) $\int\frac{x-1}{(x+2)^2}\,dx$

Descomponemos el integrando en suma de fracciones simples:

$$\frac{x-1}{(x+2)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{(x+2)^2}=\frac{A(x+2)+B}{(x+2)^2}$$

$$x-1=A(x+2)+B$$

Sustituyendo $x=-2$ y $x=0$ obtenemos $\begin{cases} -3=B \\ -1=2A+B\end{cases}$ de donde $A=1$ y $B=-3$

Así

$$\int\frac{x-1}{(x+2)^2}\,dx=\int\frac{1}{x+2}\,dx-3\int\frac{1}{(x+2)^2}\,dx=L|x+2|+\frac{3}{x+2}+c$$

7º) Halla el área encerrada entre la curva $y=x^3-3x$ y la recta $y=x$

Resolución

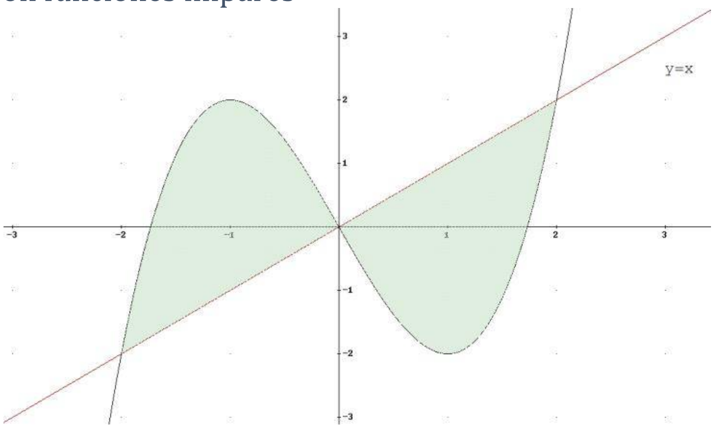
$y=x^3-3x$; $x^3-3x=0\Longrightarrow\begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3}\end{cases}$ Cortes con ejes: $A(0,0)$; $B(-\sqrt{3},0)$; $C(\sqrt{3},0)$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3-3x)=-\infty \;;\; \lim_{x\to+\infty}(x^3-3x)=+\infty$$

Cortes curva-recta:

$$x^3-3x=x\Longrightarrow x^3-4x=0 \Longrightarrow\begin{cases} x=0 \\ x=\pm 2\end{cases}$$

Representamos la región del plano cuya área vamos a calcular .
La curva y la recta son funciones impares



Área=$2\cdot\int_0^2 \left(x-(x^3-3x)\right)dx \;=2\cdot\int_0^2(-x^3+4x)dx \;=2\cdot\left[-\frac{x^4}{4}+2x^2\right]_0^2=2\cdot(-4+8)=8u^2$

Puntuación
1, 2, 3, 4, 6, 7 -------------- 1,5 puntos
5 ------------------------------ 1 “