EVAU Junio 2018. Opción A

1º) Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real m:

$$\left\{\begin{array}{lllr} x & + & my & = 1 \\ -2x & -(m+1)y & & +z = -1 \\ x & +(2m-1)y & & +(m+2)z = 2+2m \end{array}\right.$$

a) Discútase para los diferentes valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$.
b) Resuélvase para $m = 0$.

Resolución

a) Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ -2 & -(m+1) & 1 \\ 1 & 2m-1 & m+2 \end{pmatrix}$

Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & m & 0 & 1 \\ -2 & -(m+1) & 1 & -1 \\ 1 & 2m-1 & m+2 & 2+2m \end{pmatrix}$

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ -2 & -(m+1) & 1 \\ 1 & 2m-1 & m+2 \end{vmatrix} =$$
$$= -(m+1)\cdot(m+2) + m + 2m\cdot(m+2) + 1 - 2m = m^2 - 1$$

$|A| = 0 \iff m = \pm 1$

Caso 1 $\forall m \in \mathbb{R}\ m \neq \pm 1,\ |A| \neq 0$. Por tanto $rg(A) = 3 = rg(A^*) = n^{\text{o}}\ incógnitas$

$$Sistema\ Compatible\ Determinado\ (Solución\ única)$$

Caso 2 $m = -1$. En este caso $|A| = 0\ \ y\ \ rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de la matriz A:

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$, $rg(A^*) \geq 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$. Por tanto $rg(A^*) = 3$.

$$2 = rg(A) \neq rg(A^*) = 3:\ Sistema\ Incompatible\ (No\ tiene\ solución)$$

Caso 2 $m = 1$. En este caso $|A| = 0\ \ y\ \ rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de la matriz A:

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$, $rg(A^*) \geq 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$. Por tanto $rg(A^*) = 2$.

$$2 = rg(A) = rg(A^*) < 3:\ Sistema\ Compatible\ Indeterminado$$

b) Resolvemos para $m = 0$. Sistema Compatible Determinado (Caso 1)

$$\begin{cases} x & & = 1 \\ -2x & -y & +z = -1 \\ x & -y & +2z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ -y + z = 1 \\ -y + 2z = 1 \end{cases} \text{ de donde } \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

2º)

a) En un experimento en un laboratorio se han realizado cinco medidas del mismo objeto que han dado los resultados siguientes: $m_1 = 0{,}92$; $m_2 = 0{,}94$; $m_3 = 0{,}89$; $m_4 = 0{,}90$; $m_5 = 0{,}91$.
Se tomará como resultado el valor de x tal que la suma de los cuadrados de los errores sea mínima, es decir, el valor para el que la función $E(x) = (x - m_1)^2 + (x - m_2)^2 + \cdots + (x - m_5)^2$ **alcanza el mínimo.**
Calcule dicho valor x.

b) Aplíquese el método de integración por partes para calcular la integral $\int_1^3 x^2 ln(x)dx$

Resolución

a) Derivamos la función $E(x)$:

$$E'(x) = 2(x - m_1) + 2(x - m_2) + 2(x - m_3) + 2(x - m_4) + 2(x - m_5)$$

Buscamos sus puntos críticos:

$$2(x - m_1) + 2(x - m_2) + 2(x - m_3) + 2(x - m_4) + 2(x - m_5) = 0$$

$$10x = 2 \cdot (0{,}92 + 0{,}94 + 0{,}89 + 0{,}90 + 0{,}91)$$

$$10x = 9{,}12 \ ; \ x = 0{,}912$$

Como $E''(x) = 10 > 0$, el valor encontrado es mínimo.

b)

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3}\ln(x) - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + c = \frac{x^3}{3}\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + c$$

$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$

$dv = x^2 dx \Rightarrow v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$

$$\int_1^3 x^2 \ln(x) = \left[\frac{x^3}{3}\left(\ln x - \frac{1}{3}\right)\right]_1^3 = 3\left(\ln 3 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{9} = 3\ln 3 - \frac{8}{9}$$

3º) Dados los planos $\pi_1 \equiv 4x + 6y - 12z + 1 = 0$**,** $\pi_2 \equiv -2x - 3y + 6z - 5 = 0$, se pide:

a) Calcular el volumen de un cubo que tengan dos de sus caras en dichos planos.

b) Para el cuadrado de vértices consecutivos $ABCD$ **con** $A(2, 1, 3)$y $B(1, 2, 3)$, **calcular los vértices** C **y** D, **sabiendo que** C **pertenece a los planos** π_2 **y** $\pi_3 \equiv x - y + z = 2$.

Resolución

a) $\pi_1 \equiv 4x + 6y - 12z + 1 = 0$**,** $\pi_2 \equiv 4x + 6y - 12z + 10 = 0$

$$arista = d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|10 - 1|}{\sqrt{16 + 36 + 144}} = \frac{9}{\sqrt{196}} = \frac{9}{14} \text{ u}$$

$$\text{Volumen del cubo } V = arista^3 = \left(\tfrac{9}{14}\right)^3 u^3$$

b) Los planos $\pi_2 \equiv 2x + 3y - 6z + 5 = 0$ y $\pi_3 \equiv x - y + z = 2$ determinan una recta r:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + 3y - 6z + 5 = 0 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \text{ con vector director } \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -6 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 8\vec{j} - 5\vec{k} = (-3, -8, -5)$$

Buscamos un punto P de r: haciendo $z = 0$, $\begin{cases} 2x + 3y = -5 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{-9}{5}\ ; x = \frac{1}{5}; P\left(\frac{1}{5}, \frac{-9}{5}, 0\right)$

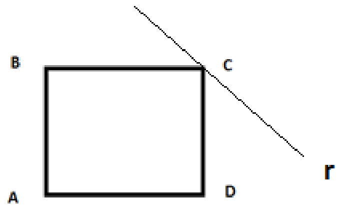
Así unas ecuaciones paramétricas de la recta r son $r \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{5} + 3t \\ y = \frac{-9}{5} + 8t \\ z = \quad 5t \end{cases}$

El punto C será de la forma $C\left(\frac{1}{5}+3t,\frac{-9}{5}+8t,5t\right)$

$\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)\,;\,\overrightarrow{BC}=\left(\frac{-4}{5}+3t,\frac{-19}{5}+8t,5t-3\right)$

$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow\frac{4}{5}-3t-\frac{19}{5}+8t=0\Leftrightarrow t=\frac{3}{5}$

Así $C(2,3,3)$



El punto D está en la recta s paralela a la que pasa por B y C, pasando por A,

$$s\equiv\begin{cases}x=2+t\\y=1+t\\z=3\end{cases}$$

$$D(2+t,1+t,3)$$

Lado del cuadrado $d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2}\,;\,\overrightarrow{AD}=(t,t,0)$

$d(A,D)=\left|\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{t^2+t^2}=\sqrt{2}\Leftrightarrow t^2=1\Leftrightarrow t=\pm1\begin{cases}D_1(3,2,3)\\D_2(1,0,3)\end{cases}$

El lado $\overline{C_1D_1}$ mide $|C_1D_1|=\sqrt{2}$, no así el lado $\overline{C_1D_2}$.

Por tanto $C(2,3,3)$ y $D(3,2,3)$

4) El 60% de las ventas en unos grandes almacenes corresponden a artículos con precios rebajados. Los clientes devuelven el 15% de los artículos que compran rebajados, porcentaje que disminuye al 8% si los artículos han sido adquiridos sin rebajas.

a) Determine el porcentaje global de artículos devueltos.

b) ¿Qué porcentaje de artículos devueltos fueron adquiridos con precios rebajados?

Resolución

Consideramos los sucesos

$R=$ "*Artículo con precio rebajado*" y

$D=$ "*El artículo es devuelto*"

a) $p(D)\overset{T.Prob.Total}{\cong}p(R)\cdot p(D|R)+p(\bar{R})\cdot p(D|\bar{R})=\frac{6}{10}\cdot\frac{15}{100}+\frac{4}{10}\cdot\frac{8}{100}=\frac{122}{1000}=0{,}122$

El porcentaje global de artículos devueltos es el 12,2%

b) $p(R|D)=\frac{p(R\cap D)}{p(D)}=\frac{p(R)\cdot p(D|R)}{p(D)}=\frac{0{,}6\cdot0{,}15}{0{,}122}=\frac{0{,}09}{0{,}122}\cong0{,}7377$

El porcentaje de artículos devueltos que fueron adquiridos con precios rebajados es del 73,77%.