Cálculo integral

1º) Calcula una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)=\sqrt{2x-1}$ tal que $F(1)=0$.

Resolución

La primitiva que buscamos estará en su integral indefinida:

$$F(x)=\int \sqrt{2x-1}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\int 2\cdot(2x-1)^{1/2}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-1)^{3/2}}{\frac{3}{2}}+c=\frac{\sqrt{(2x-1)^3}}{3}+c$$

$$F(1)=0\Leftrightarrow\frac{1}{3}+c=0\Leftrightarrow c=-\frac{1}{3}$$

La primitiva es $F(x)=\frac{\sqrt{(2x-1)^3}-1}{3}$

2º) Calcula $\int_0^1 \frac{5x}{e^{3-3x^2}}\,dx$

Resolución

$$\int_0^1 \frac{5x}{e^{3-3x^2}}\,dx=\int_0^1 5xe^{3x^2-3}dx=\frac{5}{6}\cdot\int_0^1 6xe^{3x^2-3}dx=\frac{5}{6}\left[e^{3x^2-3}\right]_0^1=\frac{5}{6}\left(1-\frac{1}{e^3}\right)$$

3º) Calcula las siguientes integrales:

Resolución

a) $\int \frac{sen\,x}{5-2\cos x}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2sen\,x}{5-2\cos x}\,dx=\frac{1}{2}ln(5-2\cos x)+c$

$b)$

$$I=\int(x-2)e^{-x}\,dx \qquad \begin{matrix} u=x-2 \\ dv=e^{-x}\,dx\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} du=dx \\ v=\int dv=\int e^{-x}\,dx=-e^{-x}\end{matrix}$$

Así aplicando la fórmula de integración por partes, obtenemos la integral

$$I=\int(x-2)e^{-x}\,dx=-(x-2)e^{-x}+\int e^{-x}\,dx=(2-x)e^{-x}-e^{-x}+c=e^{-x}(1-x)+c$$

c) $\int\frac{2x-1}{25+x^2}\,dx=\int\frac{2x}{25+x^2}\,dx-\int\frac{1}{25+x^2}\,dx=L|25+x^2|-\int\frac{\frac{1}{25}}{1+\left(\frac{x}{5}\right)^2}\,dx=$

$$=L|25+x^2|-\frac{1}{5}actg\left(\frac{x}{5}\right)+c$$

d) $\int\frac{x^2+2x+3}{x^2+x-2}\,dx=\int dx+\int\frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx=x+I_1$

$$I_1=\int\frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx=\int\frac{x+5}{(x-1)(x+2)}\,dx=$$

Descomponemos el integrando en suma de fracciones simples:

$$\frac{x+5}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$x+5=A\cdot(x+2)+B(x-1)$$

Sustituyendo $x = 1$ y $x = -2$ obtenemos $\begin{cases} 6 = 3A \\ 3 = -3B \end{cases}$ de donde $A = 2$ y $B = -1$

Por tanto:

$I_1 = \int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx = \int \frac{x+5}{(x-1)(x+2)}\,dx = \int \frac{2}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x+2}\,dx = 2L|x-1| - L|x+2| + c_1$

Así:

$$\int \frac{x^2+2x+3}{x^2+x-2}\,dx = \int dx + \int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx = x + I_1 = x + 2L|x-1| - L|x+2| + c$$

e) $\int \frac{x-3}{(x+1)^2}\,dx$

Descomponemos el integrando en suma de fracciones simples:

$$\frac{x-3}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2}$$

$$x - 3 = A(x+1) + B$$

Sustituyendo $x = -1$ y $x = 0$ obtenemos $\begin{cases} -4 = B \\ -3 = A + B \end{cases}$ de donde $A = 1$ y $B = -4$

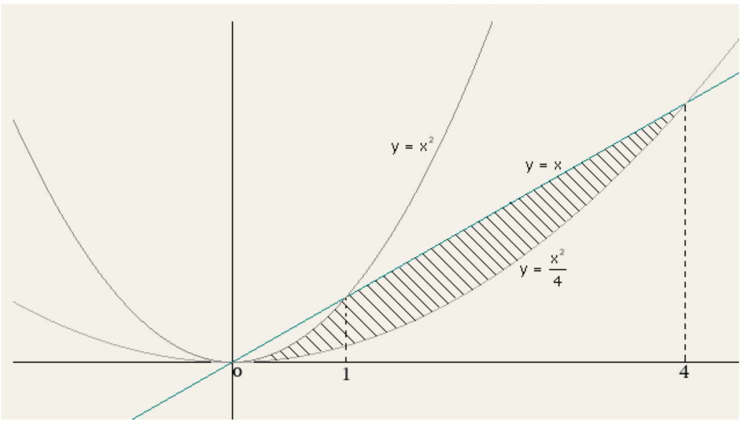
Así:

$$\int \frac{x-3}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x+1}\,dx - 4\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = L|x+1| + \frac{4}{x+1} + c$$

4º) Halla el área de la región del plano limitada por las parábolas $y = x^2$ e $y = \frac{x^2}{4}$ y la recta $y = x$.

Resolución

Se trata de la región rayada que se muestra a continuación:



Cortes:

$$x^2 = \frac{x^2}{4} \Rightarrow x = 0 \;\; ; \;\; x^2 = x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \;\; ; \;\; \frac{x^2}{4} = x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\text{Área} = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^2}{4}\right)dx + \int_1^4 \left(x - \frac{x^2}{4}\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{12}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12}\right]_1^4 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{5}{2}u^2$$

Puntuación

1, 2, -------------- 1,25 puntos

3 ----------------- 5 “

4 ----------------- 2,5 “