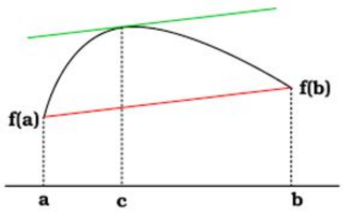
1º)
a) Teorema del valor medio de Lagrange: Enunciado e interpretación geométrica.
b) Demuestra que existe un punto en el intervalo $[0, e]$ en el que la recta tangente a la curva definida por $f(x) = \begin{cases} x \cdot \ln x & si\ x > 0 \\ 2x & si\ x \leq 0 \end{cases}$ es paralela a la cuerda que une los puntos $A(0,0)$ y $B(e,e)$. Determina dicho punto.

Resolución

a) Sea $f(x)$ función real de variable real

$$\left.\begin{matrix} f(x)\ continua\ en\ [a,b] \\ f(x)\ derivable\ en\ (a,b) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \exists c \in (a,b)\ tal\ que\ f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

esto es, existe al menos un punto c del intervalo (a,b) en el que la recta tangente a la curva $y = f(x)$ es paralela a la cuerda que une los puntos $\big(a, f(a)\big)$ y $\big(b, f(b)\big)$



Si la función f representase la ecuación de movimiento de un móvil, este teorema nos dice que en al menos un punto c del intervalo de tiempos $[a,b]$ la velocidad instantánea coincide con la velocidad media en el trayecto $[a,b]$.

b)

Continuidad

$\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$ $f(x) = x \cdot \ln x$, continua por ser producto de continuas.

Veamos que $f(x)$ es continua en $x = 0$:

1º) $f(0) = 0$

2º) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x \cdot \ln x) \overset{0\cdot(-\infty)}{\triangleq} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}\ L`H\hat{o}p}{\triangleq} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(2x) = 0$; por tanto, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

3º) $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$

Por tanto, $f(x)$ es continua en el intervalo $[0, +\infty)$ y, en particular, en el intervalo $[0, e]$.

Derivabilidad

$\forall x \in \mathbb{R}, x > 0,$ $f(x) = x \cdot \ln x$ y $f'(x) = \ln x + 1$ que está bien definida en $(0, +\infty)$. Así $f(x)$ es derivable en el intervalo $(0, e)$.

Se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[0, e]$.

$$\left.\begin{matrix} f(x)\ continua\ en\ [0,e] \\ f(x)\ derivable\ en\ (0,e) \end{matrix}\right\} \overset{T.Valor\ medio}{\Longrightarrow} \exists c \in (0,e)\ tal\ que\ f'(c) = \frac{f(e)-f(0)}{e-0} = 1$$

$$f'(c) = \ln c + 1 = 1 \Leftrightarrow \ln c = 0 \Leftrightarrow c = e^0 = 1$$

Por tanto, en el punto de abscisa $x = 1$, $P(1,0)$, la recta tangente a la curva $y = f(x)$, $t \equiv y = x - 1$, es paralela a la cuerda que une los puntos $P(0,0)$ y $Q(e,e)$.

2º) Demuestra que las gráficas de las funciones $f(x) = e^{-2x}$ y $g(x) = -x^2 + 2$ se cortan en al menos un punto de abscisa negativa y calcúlalo con una cifra decimal exacta.

Resolución

Sea $h(x) = e^{-2x} + x^2 - 2$ función continua en $\mathbb{R}$ por ser suma y resta de continuas.

$$\left.\begin{array}{r} h(x)\ es\ continua\ en\ [-1,0] \\ h(-1) = e^2 - 1 > 0 \\ h(0) = -1 < 0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \quad \exists c \in (-1,0)\ tal\ que\ h(c) = 0$$

$$h(c) = 0 \Leftrightarrow e^{-2c} + c^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{-2c} = -c^2 + 2$$

por tanto, las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en el punto de abscisa $x = c \in (-1,0)$.

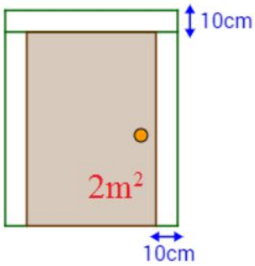
$$\left.\begin{array}{r} h(x)\ es\ continua\ en\ [-0{,}4, -03,] \\ h(-0{,}4) = 0{,}39 > 0 \\ h(-0{,}3) = -0{,}088 < 0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \quad \exists c \in (-0{,}4, -0{,}3)\ tal\ que\ h(c) = 0$$

$$h(c) = 0 \Leftrightarrow e^{-2c} + c^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{-2c} = -c^2 + 2$$

así las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en el punto de abscisa $x = c \in (-0{,}4, -0{,}3)$.

$$c = -0{,}3 \ldots con\ una\ cifra\ decimal\ exacta$$

3º) Una empresa de fabricación de puertas de madera utiliza un tablón rectangular para la hoja y tres listones de 10 cm de ancho para el marco (lados laterales y lado superior). El precio del tablón es de 128 € por metro cuadrado y el de los listones es de 87 € por metro lineal.
Calcular las dimensiones de la puerta de $2m^2$ de superficie de hoja, de coste mínimo. ¿Cuál será su precio?



Resolución

Sean x e y las medidas en metros del largo y alto de la hoja de la puerta respectivamente.

$$x \cdot y = 2\ es\ la\ restricción\ del\ problema$$

Establezcamos la función coste:
El coste de la hoja es de 256 euros.
El coste del listón superior es de $87 \cdot (x + 0{,}2)$ euros.
El coste de los listones laterales es de $87 \cdot (2y) = 174 \cdot y$
La función coste es $C(x) = 87x + 174y + 273{,}4$

Planteamiento del problema: $\left[\begin{array}{ll} minimizar\ \ C(x,y) = 87x + 174y + 273{,}4 & función\ objetivo \\ \quad s.a \qquad x \cdot y = 2 & restricción \end{array}\right.$

$$y = \frac{2}{x};\quad C(x) = 87x + \frac{348}{x} + 273{,}4;\quad C'(x) = 87 - \frac{348}{x^2}$$

$$C'(x) = 0 \Leftrightarrow 87 - \frac{348}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Como $C''(x) = \frac{696}{x^3}$ y $C''(2) > 0$, el valor $x = 2$ es el mínimo de la función coste.

Las dimensiones de la puerta serán $2m$ de largo por $1m$ de alto con un precio, en euros, de $C(2,1) = 621{,}4$ €.

4º) Demuestra que la ecuación $2x^3 + x - 5 = 0$ tiene exactamente una raíz real.

Resolución

Sea $f(x) = 2x^3 + x - 5$, función continua en $\mathbb{R}$ por ser polinómica.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ continua\ en\ [1,2] \\ f(1) = -2 < 0 \\ f(2) = 13 > 0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \quad \exists c_1 \in (1,2)\ tal\ que\ f(c_1) = 0 \Leftrightarrow 2{c_1}^3 + c_1 - 5 = 0$$

Así c_1 es raíz de la ecuación $2x^3 + x - 5 = 0$. Veamos que no tiene más.
Supongamos que c_2 fuese otra raíz de la ecuación ; así $2{c_2}^3 + c_2 - 5 = 0\ \ y\ f(c_2) = 0$
Aplicando el teorema de Rolle a la función $f(x)$ en el intervalo (c_1, c_2) se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ continua\ en\ [c_1, c_2] \\ f(x)\ derivable\ en\ (c_1, c_2) \\ f(c_1) = f(c_2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists x_1 \in (c_1, c_2)\ tal\ que\ f'(x_1) = 0$$

es decir, encontramos un punto x_1 de derivada nula.
Sin embargo, $f'(x) = 6x^2 + 1$ y $6x^2 + 1 = 0$ no tiene solución real ; esto contradice la existencia de un valor x_1 con derivada nula. La contradicción viene de suponer la existencia de una segunda raíz c_2. Por tanto, la ecuación tiene exactamente una raíz c_1.

5º) Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[x]{e^x + x}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \left((1-x)\cdot tg\frac{\pi x}{2}\right)$

Resolución

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[x]{e^x + x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} \overset{+\infty^0}{\triangleq}$

$$ln\left(\lim_{x\to+\infty} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty} ln\,(e^x + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot ln(e^x + x)\right) \overset{0.\infty}{\triangleq} \lim_{x\to+\infty}\frac{ln(e^x + x)}{x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}, L`Hôp}{\triangleq}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x + 1}{e^x + x} \overset{L`Hôp}{\triangleq} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x + 1} \overset{L`Hôp}{\triangleq} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x} = 1$$

$$\text{Así } ln\left(\lim_{x\to+\infty}(e^x + x)^{\frac{1}{x}}\right) = 1, \text{ de donde } \lim_{x\to+\infty}(e^x + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\text{b) } \lim_{x\to 1}\left((1-x)\cdot tg\frac{\pi x}{2}\right) \overset{0.\infty}{\triangleq} \lim_{x\to 1}\frac{tg\frac{\pi x}{2}}{\frac{1}{1-x}} \overset{\frac{\infty}{\infty} L`Hôp}{\triangleq} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{cos^2\frac{\pi x}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{(1-x)^2}} = \frac{\pi}{2}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)^2}{cos^2\frac{\pi x}{2}} \overset{\frac{0}{0} L`Hôp}{\triangleq}$$

$$\frac{\pi}{2}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{-2\cdot(1-x)}{-2cos\frac{\pi x}{2}\cdot sen\frac{\pi x}{2}\cdot\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)}{cos\frac{\pi x}{2}\cdot sen\frac{\pi x}{2}} \overset{\frac{0}{0} L`Hôp}{\triangleq} \frac{2}{\pi}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{-1}{-sen^2\frac{\pi x}{2} + cos^2\frac{\pi x}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

6º) Deriva y simplifica $f(x) = \left(1 - \frac{3}{2x}\right)^x$

Resolución

$$f(x) = \left(1 - \frac{3}{2x}\right)^x \Longrightarrow ln\big(f(x)\big) = ln\left(1 - \frac{3}{2x}\right)^x = x\cdot ln\left(1 - \frac{3}{2x}\right)$$

Derivando ambos miembros de la igualdad:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = ln\left(1 - \frac{3}{2x}\right) + x\cdot\frac{1}{\left(1 - \frac{3}{2x}\right)}\cdot\frac{3}{2x^2} = ln\left(1 - \frac{3}{2x}\right) - \frac{3}{2x - 3}$$

y, despejando $f'(x)$, obtenemos

$$f'(x) = \left(1 - \frac{3}{2x}\right)^x\cdot\left[ln\left(1 - \frac{3}{2x}\right) - \frac{3}{2x - 3}\right]$$

7º) Dada la función $f(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{-2x}$ determina:
a) La ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = -1$.
b) Sus asíntotas verticales y horizontales.

Resolución

$a)\ f'(x) = 2xe^{-2x} - 2(x^2-1)e^{-2x} = -2e^{-2x}(x^2 - x - 1)\ ;\ f'(-1) = -2e^2\ ;\ f(-1) = 0$

La recta tangente es $t \equiv y = -2e^2(x+1)$

b) A.V: No tiene porque $\lim_{x\to a}[(x^2-1)\cdot e^{-2x}] = (a^2-1)\cdot e^{-2a} \neq \infty$

A.H: $\lim_{x\to-\infty}[(x^2-1)\cdot e^{-2x}] = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}[(x^2-1)\cdot e^{-2x}] = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{e^{2x}} \overset{\frac{\infty}{\infty} L'Hôp}{\triangleq} \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2e^{2x}} \overset{\frac{\infty}{\infty} L'Hôp}{\triangleq} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2e^{2x}} = 0;$$

$y = 0$ es A.H

8º) Estudia el dominio, corte con los ejes, monotonía, curvatura y asíntotas de la función $f(x) = \frac{2x^2}{x+1}$. Esboza su gráfica.

Resolución

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ porque $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Cortes con los ejes coordenados: $O(0,0)$

Monotonía: $f'(x) = \frac{4x\cdot(x+1)-2x^2}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+4x}{(x+1)^2};\ \begin{cases} Ceros: 2x^2+4x = 0 \Longrightarrow x = 0; x = -2 \\ Polos:\ (x+1)^2 \Longrightarrow x = -1 \end{cases}$

Signo de f'	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,0)$	$(0,+\infty)$
	$+$	$-$	$-$	$+$

$f(x) crece\ en\ (-\infty,-2)\cup(0,+\infty)\ ;\quad f(x) decrece\ en\ (-2,-1)\cup(-1,0)$

Curvatura: $f''(x) = \frac{4}{(x+1)^3}\begin{cases} > 0\ en\ (-1,+\infty)\ Cóncava \\ < 0\ en\ (-\infty,-1\ ) Convexa \end{cases}$

Asíntotas :

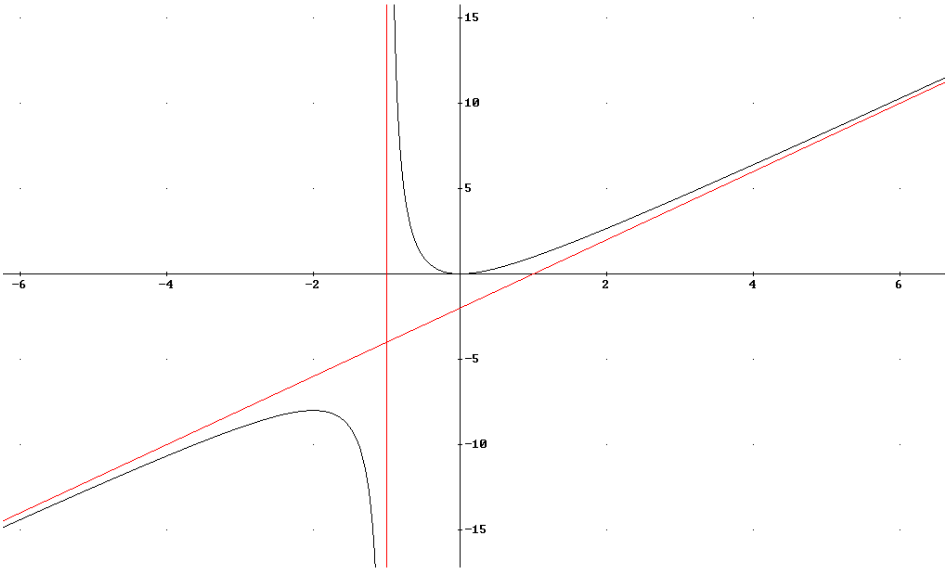
$$\lim_{x\to-1}\frac{2x^2}{x+1} \overset{\frac{2}{0}}{\triangleq} \begin{cases} \lim_{x\to-1^-}\frac{2x^2}{x+1} \overset{\frac{2}{0^-}}{\triangleq} -\infty \\ \lim_{x\to-1^+}\frac{2x^2}{x+1} \overset{\frac{2}{0^+}}{\triangleq} +\infty \end{cases}$$ la recta $x = -1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal no tiene porque $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x+1} = \pm\infty$

Asíntota oblicua: $y = mx + n$

$m = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2x^2}{x+1}}{x} = 2$; $n = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2}{x+1} - 2x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x}{x+1} = -2$; $y = 2x - 2$ es asíntota oblicua .

Representación gráfica



Puntuaci�n

1, 2, 3, 5, 8 ------- 1,5 puntos
4, 7 ---------------- 1 “
6, ------------------ 0,5 “