1º) Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+12}+4x}{2x-1}$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x}{x^2-1}-\frac{1-2x}{3x+2}\right)^{-2x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3+x^2}{x^2-1}+\frac{3-5x}{3x}\right)^{\frac{2x}{3}}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3+x^2}{x^2-1}+\frac{3-5x}{5x}\right)^{\frac{2x}{3}}$ **e)** $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x-\sqrt{2x+7}}{x^2-1}$

Resolución

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+12}+4x}{2x-1}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{4x^2+12}+4x}{x}}{\frac{2x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{12}{x^2}}+4}{2-\frac{1}{x}}=\frac{6}{2}=3$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x}{x^2-1}-\frac{1-2x}{3x+2}\right)^{-2x}\overset{\left(\frac{2}{3}\right)^{-\infty}}{=}+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3+x^2}{x^2-1}+\frac{3-5x}{3x}\right)^{\frac{2x}{3}}\overset{\left(\frac{1}{3}\right)^{+\infty}}{=}0$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3+x^2}{x^2-1}+\frac{3-5x}{5x}\right)^{\frac{2x}{3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3+x^2}{x^2-1}-\frac{3+5x}{5x}\right)^{\frac{-2x}{3}}\overset{1^{-\infty}}{=}e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{-2x}{3}\cdot\left(\frac{3+x^2}{x^2-1}-\frac{3+5x}{5x}\right)\right]}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{-2x}{3}\cdot\frac{-3x^2+20x+3}{5x^3-5x}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{6x^3-40x^2-6x}{15x^3-15x}\right]}=e^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{e^2}$

e) $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x-\sqrt{2x+7}}{x^2-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to1}\frac{\left(3x-\sqrt{2x+7}\right)\cdot\left(3x+\sqrt{2x+7}\right)}{(x^2-1)\cdot\left(3x+\sqrt{2x+7}\right)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{9x^2-2x-7}{(x^2-1)\cdot\left(3x+\sqrt{2x+7}\right)}=$
$\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)\cdot(9x+7)}{(x-1)\cdot(x+1)\cdot\left(3x+\sqrt{2x+7}\right)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(9x+7)}{(x+1)\cdot\left(3x+\sqrt{2x+7}\right)}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$

2º) Estudia y clasifica los puntos de discontinuidad de la función $f(x)=\frac{3x-3}{x^2+4x-5}$

Resolución

$x^2+4x-5=0\Longrightarrow\begin{cases}x=-5\\x=1\end{cases}$ $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{-5,1\}$ por ser racional

$\boldsymbol{x=-5}$

1º) $f(-5)$ no definido

2º) $\lim\limits_{x\to-5}\frac{3x-3}{x^2+4x-5}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to-5^-}\frac{3x-3}{(x+5)\cdot(x-1)}\overset{\frac{-18}{0^+}}{=}-\infty\\ \lim\limits_{x\to-5^+}\frac{3x-3}{(x+5)\cdot(x-1)}\overset{\frac{-18}{0^-}}{=}+\infty\end{cases}$ Discontinuidad de salto infinito en $x=-5$

$\boldsymbol{x=1}$

1º) $f(1)$ no definido

2º) $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x-3}{x^2+4x-5}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to1}\frac{3\cdot(x-1)}{(x+5)\cdot(x-1))}=\lim\limits_{x\to1}\frac{3}{x+5}=\frac{1}{2}$

Discontinuidad evitable en $x=1$; verdadero valor de la función $f(1)=\frac{1}{2}$

3º) Considera la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x + 3 & si \;\; x \le 1 \\ Lx & si \;\; x > 1 \end{cases}$ **con** $a \in \mathbb{R}$

a) Determina el valor de a **para que la función sea continua en el conjunto** $\mathbb{R}$ **de los números reales.**

b) Representa gráficamente la función para $a = -1$.

Resolución

a) $\forall x \in \mathbb{R} \;\; x < 1,\;\; f(x) = ax^2 - 2x + 3$: continua por ser función polinómica.

$\forall x \in \mathbb{R} \;\; x > 1,\;\; f(x) = Lx$ continua (función logarítmica).

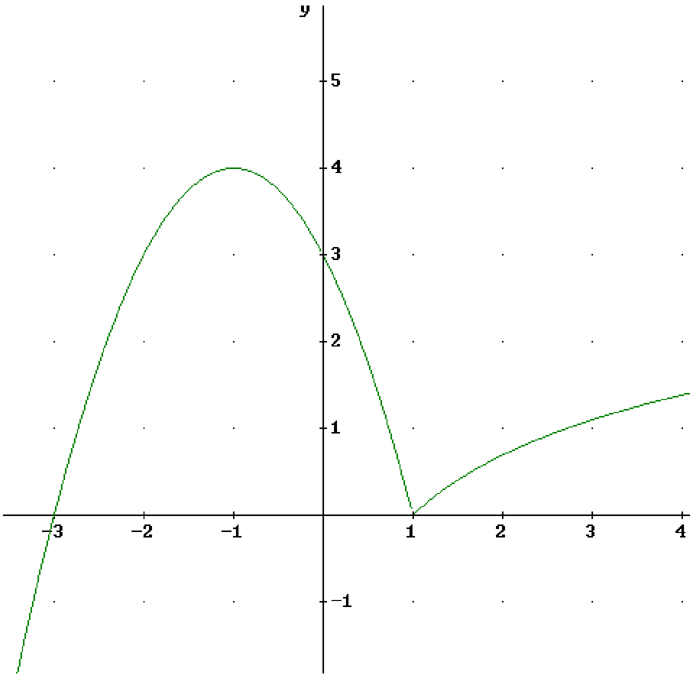
$x = 1$ Exigimos que se cumplan las condiciones de continuidad en el punto $x = 1$:

$Existencia\ de\ f(1) = a - 2 + 3 = a + 1$

$$Existencia\ de\ \lim_{x \to 1} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} (ax^2 - 2x + 3) = a + 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (Lx) = 0 \end{cases}$$

Por tanto se ha de cumplir que $a + 1 = 0$ de donde $a = -1$

b) $a = -1$ $\quad f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 3 & si \;\; x \le 1 \\ Lx & si \;\; x > 1 \end{cases}$



4º) Probar que la ecuación $x^4 - 4x^2 - 1 = 0$ **tiene alguna solución negativa y determinarla con una cifra decimal exacta.**

Resolución

Sea $f(x) = x^4 - 4x^2 - 1$, función continua en $\mathbb{R}$ por ser polinómica.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\ continua\ en\ [-3,-2] \\ f(-3) = 44 > 0 \\ f(-2) = -1 < 0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \exists x_0 \in (-3,-2)\ tal\ que\ f(x_0) = 0 \Leftrightarrow {x_0}^4 - 4{x_0}^2 - 1 = 0$$

Por tanto, $x_0 \in (-3,-2)$ es solución negativa de la ecuación $x^4 - 4x^2 - 1 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\ continua\ en\ [-2'1,-2] \\ f(-2'1) = 0{,}8081 > 0 \\ f(-2) = -1 < 0 \end{array}\right\} \overset{Bolzano}{\Longrightarrow} \exists x_0 \in (-2'1,-2)\ tal\ que\ f(x_0) = 0 \Leftrightarrow {x_0}^4 - 4{x_0}^2 - 1 = 0$$

La solución negativa con una cifra decimal exacta es $x_0 = -2{,}0 \ldots$

5º) Demostrar que la ecuación $e^{-x} + 2 = x$ tiene, al menos, una solución real.

Resolución

Sea $f(x) = e^{-x} + 2 - x$ continua en $\mathbb{R}$ por ser suma y resta de continuas.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ es\ continua\ en\ [2,3] \\ f(2) = \dfrac{1}{e^2} > 0 \\ f(3) = \dfrac{1}{e^3} - 1 < 0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \exists x_0 \in (2,3)\ tal\ que\ f(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{-x_0} + 2 - x_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-x_0} + 2 = x_0 \Leftrightarrow x_0\ es\ solución\ de\ la\ ecuación\ e^{-x} + 2 = x$$

6º) Probar que la función $f(x) = \frac{x^2+1}{3-cosx}$ toma el valor 2 en algún punto del intervalo $[0,\pi]$, es decir, $\exists c \in (0,\pi)$ tal que $f(c) = 2$.

Resolución

Vamos a utilizar el teorema de los valores intermedios (T.V.I)

$f(x) = \frac{x^2+1}{3-cosx}$ es continua en $\mathbb{R}$ por ser cociente de continuas y $3 - cosx \neq 0$.

$$f(x)\ es\ continua\ en\ [0,\pi] \overset{T.V.I}{\Longrightarrow} f(x)\ toma\ todos\ los\ valores\ comprendidos\ entre\ f(0) = \frac{1}{2}$$

$y\ f(\pi) = \frac{\pi^2+1}{4}$. Por lo tanto, como $2 \in \left(\frac{1}{2}, \frac{\pi^2+1}{4}\right)$, $existe\ c \in [0,\pi]\ tal\ que\ f(c) = 2$

Otra forma de probarlo es la siguiente:

Sea $g(x) = \frac{x^2+1}{3-cosx} - 2$ función continua en $\mathbb{R}$ por ser resta y cociente de continuas y $3 - cosx \neq 0$.

$$\left.\begin{array}{r} g(x)\ es\ continua\ en\ [0,\pi] \\ g(0) = -\dfrac{3}{2} < 0 \\ g(\pi) = \dfrac{\pi^2 - 7}{4} > 0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \exists c \in [0,\pi]\ tal\ que\ g(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{c^2+1}{3 - cosc} - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{c^2+1}{3 - cosc} = 2 \Leftrightarrow f(c) = 2$$

7º) Demuestra que las gráficas de las funciones $f(x) = 2^{x-1}$ y $g(x) = 1 + (1+x)^2$ se cortan en algún punto.

Resolución

Se trata de demostrar que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $2^{x_0-1} = 1 + (1+x_0)^2$

Consideremos la función $h(x) = 2^{x-1} - 1 - (1+x)^2$ que es continua en $\mathbb{R}$ por ser resta de continuas.

$$\left.\begin{array}{r} h(x)\ es\ continua\ en\ [7,8] \\ h(7) = -1 < 0 \\ h(8) = 44 > 0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \exists x_0 \in (7,8)\ tal\ que\ h(x_0) = 0$$

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2^{x_0-1} - 1 - (1+x_0)^2 = 0 \Leftrightarrow 2^{x_0-1} = 1 + (1+x_0)^2$$

Por tanto, las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en un punto de abscisa $x_0 \in (7,8)$.

Puntuación

1 ------------------- 2,5 puntos

2, 3, 4, 5, 6, 7 ----- 1,25 “