1º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, encuentra todas las matrices que conmutan con A.

Resolución

$$A \cdot X = X \cdot A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ 4a+2c & 4b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+4b & 2b \\ c+4d & 2d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a+4b \\ b = 2b \\ 4a+2c = c+4d \\ 4b+2d = 2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = a \\ b = 0 \\ c = 4d-4a \\ d = d \end{cases}$$

Las matrices buscadas son de la forma $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 4(d-a) & d \end{pmatrix} \quad \forall\, a, d \in \mathbb{R}$

2º) Justifica si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes:

a) Si $A \in \mathcal{M}_{mxn}$, siempre es posible efectuar el producto $A.A^t$.

b) El producto de dos matrices simétricas de la misma dimensión es también una matriz simétrica.

Resolución

a) Si $A \in \mathcal{M}_{mxn}$, entonces $A^t \in \mathcal{M}_{nxm}$ y, por tanto, $A \cdot A^t \in \mathcal{M}_m$. La afirmación es verdadera.

b) Sean $A, B \in \mathcal{M}_n$ simétricas. Se tiene que $A = A^t$ y $B = B^t$.

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t = B \cdot A \overset{No\ conmutativo}{\neq} A \cdot B$$

En general $A \cdot B \neq (A \cdot B)^t$ y, por tanto, la afirmación es falsa.

3º) En una fábrica de artículos deportivos se dispone de 10 cajas de diferentes tamaños, grandes, medianas y pequeñas, para envasar las camisetas de atletismo producidas, con capacidad para 50, 30 y 25 camisetas respectivamente. Si una caja grande fuera mediana, entonces habría el mismo número de grandes y de medianas. En total se envasan 390 camisetas. Determina el número de cajas que hay de cada clase.

Resolución

$x \equiv nº\ de\ cajas\ grandes;\ y \equiv bº\ de\ cajas\ medianas;\ z \equiv nº\ de\ cajas\ pequeñas$

El sistema de ecuaciones lineales es $\begin{cases} x+y+z = 10 \\ x-1 = y+1 \\ 50x+30y+25z = 390 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 10 \\ x-y \quad = 2 \\ 50x+30y+25z = 390 \end{cases}$

que resolvemos por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 50 & 30 & 25 & 390 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -2 & -1 & -8 \\ 0 & -20 & -25 & -110 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -2 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -15 & -30 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+y+z = 10 \\ -2y-z = -8 \\ -15z = -30 \end{cases} \qquad \text{de donde } z = 2\ ;\ y = 3\ ;\ x = 5$$

Hay 5 cajas grandes, 3 medianas y 2 pequeñas

4º) Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Determina los valores de k **para los que la matriz** A **tiene inversa.**

b) Calcula la matriz inversa de A **para** k=0.

c) Resuelve la ecuación matricial $X \cdot A - B = C$.

Resolución

$a)\ |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ k & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - k\ ;\ 1 - k = 0 \Rightarrow k = 1$

La matriz A tiene inversa para todo k real distinto de 1

b) $k = 0$; Inversa de A:

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\ ;\ A^{-1} = \frac{1}{|A|}[Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $X \cdot A - B = C \iff X \cdot A = B + C \iff X = (B + C) \cdot A^{-1}$; $B + C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

La solución es: $X = (B + C) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

5º) Considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a**:**

$$\begin{cases} x - y + z = a \\ 2x - y + az = 3a \\ ax - y + 2z = 6 \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro a**.**

b) Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

Resolución

a) Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & a \\ a & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Matriz ampliada con la columna de términos independientes: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 2 & -1 & a & 3a \\ a & -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & a \\ a & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - a^2 - 2 + a + 4 + a = -a^2 + 2a$$

$|A| = 0 \iff -a^2 + 2a = 0 \iff \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$

Caso 1 $\forall a \in \mathbb{R}\ a \neq 0, a \neq 2\ |A| \neq 0$. Por tanto $rg(A) = 3 = rg(A^*) = nº\ incógnitas$

Sistema Compatible Determinado (Solución única)

Caso 2 $a = 0$. En este caso $|A| = 0\ y\ rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \qquad ; \qquad \text{Por tanto } rg(A^*) = 3$$

$$2 = rg(A) \neq rg(A^*) = 3: \ \ Sistema\ Incompatible, no\ tiene\ solución$$

Caso 3 $a = 2$. En este caso $|A| = 0\ \ y\ \ rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} \overset{C_3=2\cdot C_1}{\triangleq} 0 \qquad ; \qquad \text{Por tanto } rg(A^*) = 2$$

$rg(A) = rg(A^*) = 2 < nº\ incógnitas$: $\ \ Sistema\ Compatible\ Indeterminado$.

b) Resolvemos para $a = 2$.

Observando el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, el sistema equivalente viene dado por las ecuaciones cuyos coeficientes forman parte de dicho menor, esto es $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 6 \end{cases}$

Las incógnitas principales del sistema son aquellas cuyos coeficientes forman parte de las columnas del menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, es decir x e y. La incógnita z actúa como incógnita no principal o parámetro. Así, tenemos:

$$z = t; \quad \begin{cases} x - y = 2 - t \\ 2x - y = 6 - 2t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{de donde} \quad x = 4 - t\ ;\ y = 2$$

La solución viene dada por $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 2 \\ z = \ \ t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$

Puntuación

1 ------------------- 1 punto
2, 3 ---------------- 2 "
4, 5 ---------------- 2,5 "