Matemáticas II 2ºBC ** Mat-Det-Sist ** Oct-18

1º) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, encuentra todas las matrices que conmutan con A.

Resolución

Se trata de encontrar las matrices $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ tales que $A\cdot X=X\cdot A$

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a+3c & b+3d\\ -c & -d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 3a-b\\ c & 3c-d\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}a+3c=a\longrightarrow a=a\\ -c=c\ \longrightarrow c=0\\ b+3d=3a-b\\ -d=3c-d\longrightarrow d=d\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=0\\ b=\dfrac{3a-3d}{2}\\ a,d\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Las matrices que buscamos son de la forma $X=\begin{pmatrix}a & \frac{3a-3d}{2}\\ 0 & d\end{pmatrix}\ \forall a,d\in\mathbb{R}$

2º) El determinante de una matriz cuadrada A de orden 3 es -1. Justifica si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes:

a) $|-A|=-3$

b) El rango de la matriz A es 3.

c) El sistema homogéneo de ecuaciones lineales $A\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ tiene infinitas soluciones.

Resolución

a) Es falsa porque $|-A|=(-1)^3\cdot|A|=-(-1)=1$.

b) Es verdadera porque al ser $|A|=-1\neq 0$, se tiene $rg(A)=3$

c) Es falso porque $rg(A)=3=n^{\text{o}}\ de\ incógnitas: S.C.D, solución\ única\ x=y=z=0$.

3º) Un grupo de estudiantes ha realizado un viaje por tres países (Francia, Alemania y Suiza). En los hoteles cada estudiante ha pagado: 20 euros diarios en Francia, 25 euros diarios en Alemania y 30 euros diarios en Suiza. En comidas cada uno ha gastado: 20 euros diarios en Francia, 15 euros diarios en Alemania y 25 euros diarios en Suiza. Además, el transportista les ha cobrado 8 euros diarios a cada uno. Sabiendo que el gasto total del viaje ha sido 765 euros por persona, que ha durado 15 días y que han esta do en Francia el doble de días que en Suiza, obtenga el número de días que han estado en cada uno de los tres países.

Resolución

Sean x,y,z el número de días que los estudiantes han estado en Francia, Alemania y Suiza respectivamente. Del enunciado, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases}x+y+z=15\\ x\quad\ -2z=0\\ 48x+48y+63z=765\end{cases}$$

Vamos a utilizar el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 15\\ 1 & 0 & -2 & 0\\ 48 & 48 & 63 & 765\end{array}\right)\xleftrightarrow[F_3-48\cdot F_1]{F_2-F_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 15\\ 0 & -1 & -3 & -15\\ 0 & 0 & 15 & 45\end{array}\right)$$

El sistema escalonado equivalente es:

$$\begin{cases} x+y+z=15 \\ \quad -y-3z=-15 \\ \qquad 15z=45 \end{cases} \quad \text{cuya solución es} \quad z=3; y=6; x=6$$

Por tanto, han estado 6 días en Francia, 6 en Alemania y 3 en Suiza .

4º) Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & k & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$

Considera la ecuación matricial $X\cdot A=B$

a) Halla los valores de k **para los que la ecuación matricial** $X\cdot A=B$ **tiene solución única .**

b) Calcula la matriz X **para** $k=4$.

c) Calcula el determinante de la matriz $A^2\cdot B$ **en función de** k**.**

Resolución

a) Para poder hallar X es necesario que la matriz A tenga inversa A^{-1} y, por tanto $|A|\neq 0$.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & k & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1\end{vmatrix}=k+1 \;\; ; \;\; k+1=0 \Longrightarrow k=-1$$

La ecuación matricial $X\cdot A=B$ tiene solución única si y solo si $k\neq -1$

b) $k=4 \Longrightarrow A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$; $|A|=5\neq 0$

$$X\cdot A=B \Longrightarrow X\cdot A\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1} \Longrightarrow X=B\cdot A^{-1}$$

Calculamos A^{-1}:

$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix}=1$; $A_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1$; $A_{13}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-1$

$A_{21}=-\begin{vmatrix}4 & 0\\ -1 & -1\end{vmatrix}=4$; $A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-1$; $A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 4\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1$

$A_{31}=\begin{vmatrix}4 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=8$; $A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-2$; $A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-3$

Matriz adjunta de A: $Adj(A)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 4 & -1 & 1\\ 8 & -2 & -3\end{pmatrix}$

Matriz inversa de A: $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot(Adj(A))^t=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}1 & 4 & 8\\ 1 & -1 & -2\\ -1 & 1 & -3\end{pmatrix}$

Por tanto, $X=B\cdot A^{-1}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 4 & 8\\ 1 & -1 & -2\\ -1 & 1 & -3\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & -5\\ 2 & 3 & 11\\ 3 & 7 & 14\end{pmatrix}$

c) $|A|=\begin{vmatrix}1 & k & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1\end{vmatrix}=k+1$; $|B|=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=-1$

$$|A^2\cdot B|=|A\cdot A\cdot B|=|A|\cdot|A|\cdot|B|=|A|^2\cdot|B|=-(k+1)^2$$

5º) Considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} 10x-20y-10z=8a+44 \\ 2x-5y+3z=4a+4 \\ 3x-7y+2z=5a+9 \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro a.

b) Resuélvelo para $a=-3$.

Resolución

a) Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A = \begin{pmatrix} 10 & -20 & -10 \\ 2 & -5 & 3 \\ 3 & -7 & 2 \end{pmatrix}$

Matriz ampliada: $A^* = \begin{pmatrix} 10 & -20 & -10 & 8a+44 \\ 2 & -5 & 3 & 4a+4 \\ 3 & -7 & 2 & 5a+9 \end{pmatrix}$

Vemos el rango de la matriz A:

Como $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, tenemos que $rg(A) \geq 2$

$$|A| = \begin{vmatrix} 10 & -20 & -10 \\ 2 & -5 & 3 \\ 3 & -7 & 2 \end{vmatrix} = 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \\ 3 & -7 & 2 \end{vmatrix} = 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} \overset{Dos\ filas\ iguales}{=} 0$$

Por tanto, $rg(A) = 2$

Vemos el rango de la matriz A^*: $rg(A^*) \geq 2$

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ con la primera fila y la cuarta columna y según sea o no nulo ese menor, el rango de la matriz A^* será 2 o 3:

$$\begin{vmatrix} 10 & -20 & 8a+44 \\ 2 & -5 & 4a+4 \\ 3 & -7 & 5a+9 \end{vmatrix} =$$
$$= -250a - 450 - 240a - 240 - 112a - 616 + 120a + 660 + 200a + 360 + 280a + 280 = -2a - 6$$

El valor que anula esa expresión es $-2a - 6 = 0 \Leftrightarrow a = -3$

Caso 1 $\forall a \in \mathbb{R}\ \ a \neq -3\ , rg(A) = 2 \neq 3 = rg(A^*)$

$$Sistema\ Incompatible\ (No\ tiene\ solución)$$

Caso 2 $a = -3$. En este caso $rg(A) = rg(A^*) = 2 < n^{\underline{o}}\ incógnitas$

$$Sistema\ Compatible\ Indeterminado$$

b) Observando el menor $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, el sistema equivalente viene dado por las ecuaciones cuyos coeficientes forman parte de dicho menor, esto es $\begin{cases} 2x - 5y + 3z = -8 \\ 3x - 7y + 2z = -6 \end{cases}$

Las incógnitas principales del sistema son aquellas cuyos coeficientes forman parte de las columnas del menor $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, es decir x e y. La incógnita z actúa como incógnita no principal o parámetro. Así tenemos:

$z = t;\quad \begin{cases} 2x - 5y = -8 - 3t \\ 3x - 7y = -6 - 2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$, de donde, aplicando la regla de Cramer,

$$x = \begin{vmatrix} -8-3t & -5 \\ -6-2t & -7 \end{vmatrix} = 26 + 11t \quad ; \quad y = \begin{vmatrix} 2 & -8-3t \\ 3 & -6-2t \end{vmatrix} = 12 + 5t$$

La solución viene da da por $\begin{cases} x = 26 + 11t \\ y = 12 + 5t \\ z = \quad t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Puntuación

1 ------------------- 1 punto
2 ------------------- 1’5 “
3 ------------------- 2 “
4 ------------------- 3 “
5 ------------------- 2’5 “