Continuidad de funciones

1º) Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+1 & si \;\; x\le 1 \\ 3x-1 & si \;\; x>1 \end{cases}$ estudia su continuidad y represéntala gráficamente.

2º) Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+1 & si \;\; x\le 1 \\ 3x-5 & si \;\; x>1 \end{cases}$ estudia su continuidad en $x=1$ y represéntala gráficamente.

3º) Se considera la función real de variable real $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & si \;\; x\le 1 \\ -x^2+4x-3 & si \;\; x>1 \end{cases}$

a) Estúdiese la continuidad de la función f.
b) Represéntese gráficamente la función f.

Resolución

a) $\forall x\in\mathbb{R}\;\; x<1,\;\; f(x)=x^2-4x+3$: continua por ser función polinómica.

$\forall x\in\mathbb{R}\;\; x>1,\;\; f(x)=-x^2+4x-3$: continua por ser función polinómica.

Estudiamos la continuidad en $x=1$ comprobando las condiciones:

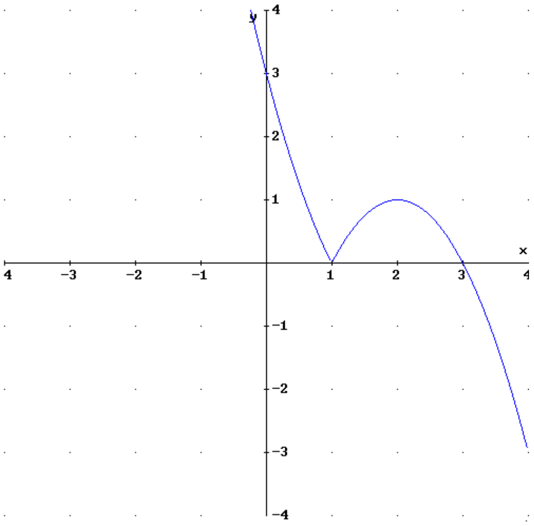
1] $f(1)=0$

2] $\lim\limits_{x\to 1} f(x)\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-4x+3)=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+}(-x^2+4x-3)=0 \end{cases}$ de donde $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$

3] $f(1)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Por tanto la función f es continua en el conjunto de los números reales.

b) Representación gráfica



4º) Estudia y clasifica los puntos de discontinuidad de la función $f(x)=\frac{2x-1}{x^2+2x-3}$

5º) Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2-a & si \;\; x\le -1 \\ -3x^2+b & si \;\; -1<x<1 \\ Lx+a & si \;\; x\ge 1 \end{cases}$$

a) Calcúlense a y b, para que la función f sea continua en todos los puntos.
b) Represéntese gráficamente.

Resolución

a) $\forall x\in\mathbb{R}\;\; x<-1,\;\; f(x)=2x^2-a$: continua por ser función polinómica.

$\forall x\in\mathbb{R}\;\; -1<x<1,\;\; f(x)=-3x^2+b$: continua por ser función polinómica.

$\forall x \in \mathbb{R}\ x > 1,\ f(x) = Lx + a$: continua porque la funci�n logar�mica lo es.

Para que la funci�n sea continua en los puntos $x = -1$ y $x = 1$ tenemos:

Caso 1 $x = -1$

1] $f(-1) = 2 - a$

2] $\lim_{x \to -1} f(x) \begin{cases} \lim_{x \to -1^-} (2x^2 - a) = 2 - a \\ \lim_{x \to -1^+} (-3x^2 + b) = -3 + b \end{cases}$ de donde $2 - a = -3 + b$, esto es, $a + b = 5$ (1)

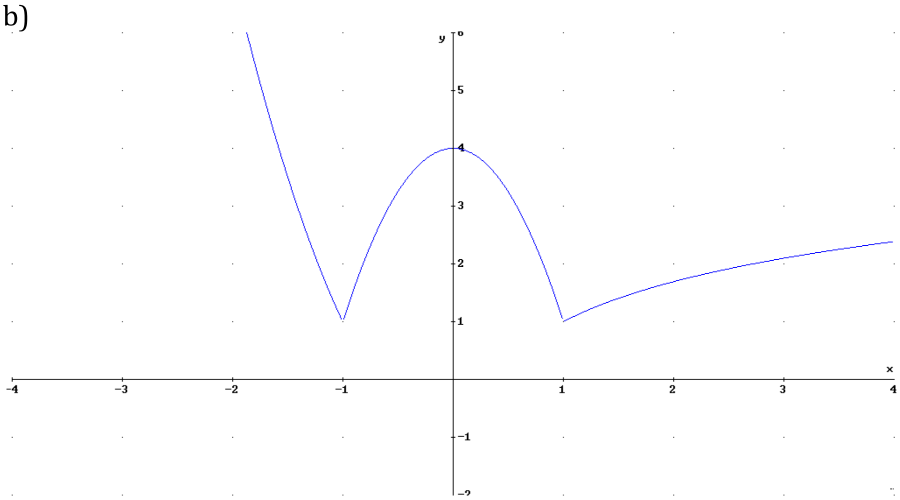
Caso 2 $x = 1$

1] $f(1) = L1 + a = a$

2] $\lim_{x \to 1} f(x) \begin{cases} \lim_{x \to 1^-} (-3x^2 + b) = -3 + b \\ \lim_{x \to 1^+} (Lx + a) = a \end{cases}$ de donde $a = -3 + b$ o $a - b = -3$ (2)

Para que $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$, las expresiones (1) y (2) han de verificarse a la vez. Tenemos as�el sistema de ecuaciones $\begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = -3 \end{cases}$ que nos da la soluci� $a = 1$ y $b = 4$.

b)



6�) Se considera la funci�n real de variable real $f(x) = \begin{cases} e^x & si\ x < 0 \\ \frac{a+3x}{x^2-4x+3} & si\ x \geq 0 \end{cases}$

Est�iese la continuidad de f en $x = 0$ para los distintos valores del par�metro a.

Selectividad: Madrid Junio 2013 Opci�n B

Resoluci�n

Estudiamos las condiciones de continuidad en $x = 0$:

1] $f(0) = \frac{a}{3}$

2] $\lim_{x \to 0} f(x) \begin{cases} \lim_{x \to 0^-} e^x = 1 \\ \lim_{x \to 0^+} \frac{a+3x}{x^2-4x+3} = \frac{a}{3} \end{cases}$ de donde $\frac{a}{3} = 1$ y $a = 3$.

Por tanto: $\left[\begin{array}{l} a = 3 \implies f(x) \text{ es continua en } x = 0 \\ \forall a \in \mathbb{R}\ a \neq 3 \implies f(x) \text{ no es continua en } x = 0 \end{array} \right.$

7�) Se considera la funci�n real de variable real definida por $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 3 & si\ x \leq 1 \\ ln(2x - 1) & si\ x > 1 \end{cases}$

a) Calc�ese a para que la funci�n f sea continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Represéntese gráficamente la función para el caso $a = 3$.

Nota: $ln\ x$ *denota al logaritmo neperiano del número* x.

Selectividad: Madrid Septiembre 2013 Opci�n B

Resoluci�n

a) $\forall x \in \mathbb{R}\ x < 1,\ f(x) = ax^2 - 3$: es continua por ser funci� polin�ica.

$\forall x \in \mathbb{R}\ x > 1,\ f(x) = \ln(2x - 1)$: es continua por ser composici� de funciones continuas.

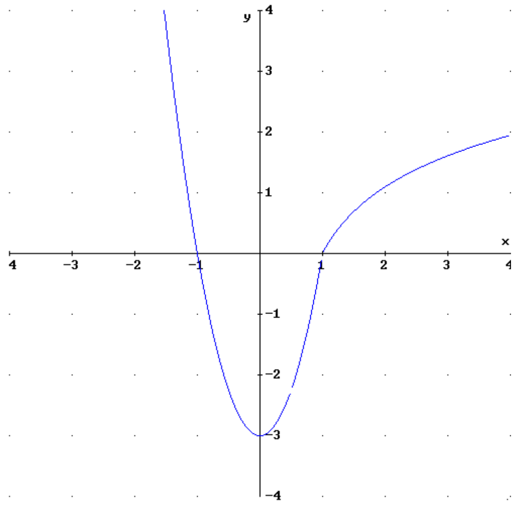
$[f = goh$ siendo $g(x) = \ln(x)$ y $h(x) = 2x - 1]$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$ se deben cumplir las condiciones de continuidad de una función en un punto:

1] $f(1) = a - 3$

2] $\lim_{x\to 1} f(x) \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} (ax^2 - 3) = a - 3 \\ \lim_{x\to 1^+} \ln(2x - 1) = ln1 = 0 \end{cases}$

de donde $a - 3 = 0$; $a = 3$ es el valor buscado.



b) $a = 3$

Representación gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & si\ x \le 1 \\ ln(2x - 1) & si\ x > 1 \end{cases}$$

8º) Demuestra que la ecuación $x^3 + x^2 - 7x + 1 = 0$ tiene al menos una raíz real en el intervalo $[0, 1]$.

9º) La función $y = tgx$ toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$y, sin embargo, no se anula en ningún punto del mismo. ¿Contradice esto el Teorema de Bolzano?

10º) Demuestra que la ecuación $x + senx - 1 = 0$ tiene al menos una raíz real.

11º) Dada la función $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1$, demuestra que para algún valor $c \in [2, 3]$, se cumple que $f(c) = \sqrt{2}$.

12º) Probar que las funciones $f(x) = Lx$ y $g(x) = e^{-x}$ se cortan en algún punto y localizarlo mediante un intervalo de amplitud 1.

13º) Calcula, con una cifra decimal exacta, la solución de la ecuación $x^3 - 2x + 1 = 0$ en el intervalo $[-2, -1]$

14º) Si f es continua en $[0, 1]$ y cumple $0 < f(x) < 1$ en dicho intervalo, demuestra que tiene que haber algún número real $c \in (0, 1)$ para el que $f(c) = c$.

15º) Si el término independiente de un polinomio $P(x)$ es igual a -5 y el $P(3) = 7$, razonar que existe algún punto α del intervalo $[0, 3]$ tal que $P(\alpha) = 2$.

16º) Prueba que la ecuación $x^3 = 2^x$ tiene dos soluciones reales. Aproxímalas con una cifra decimal exacta. [Sol: $x_1 = 1{,}4$ y $x_2 = 9{,}9$]

17º) Probar que la función $f(x) = \frac{x^2}{2 - senx}$ toma el valor 3 en algún punto del intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, es decir, $\exists c \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ tal que $f(c) = 3$.