Tema 5: Funciones. Límites de funciones

1. Concepto de función

Una **aplicación** entre dos conjuntos A y B es una transformación que asocia a cada elemento del conjunto A un único elemento del conjunto B.

Una **función real de variable real** f es una aplicación entre un subconjunto $D \subset \mathbb{R}$, no vacío, llamado *dominio*, y el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. La escribiremos así:

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow y = f(x)$$

Se trata de una relación entre dos variables, de forma que a cada valor de la *variable independiente* x del dominio le corresponde un único valor $y \in \mathbb{R}$, que es la *variable dependiente*, a la que llamaremos *imagen* de x, $y = f(x)$.
También diremos que x es la antiimagen o imagen inversa de y.

El dominio D de la función está formado por todos los números reales que tienen imagen. No siempre es conocido y será necesario calcularlo.

$$D = Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} / \exists y = f(x)\}$$

Se llama *gráfica de una función* f, y lo escribiremos $G(f)$, al conjunto de pares ordenados (x, y) tales que $y = f(x)$ con $x \in D$. La representación en el plano de ese conjunto es la gráfica de la función.

Se llama *recorrido o imagen* de una función al conjunto de sus imágenes:

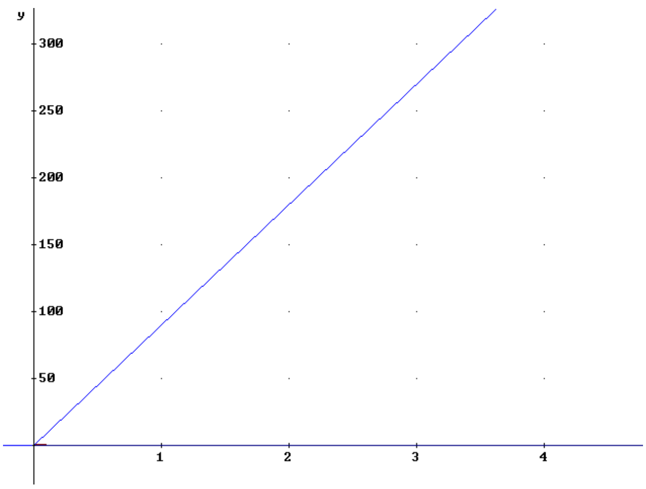
$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in D, y = f(x)\}$$

Las funciones pueden ser descritas o expresadas mediante su fórmula o expresión algebraica, su gráfica o una tabla de valores.

Ejemplo 1

Un móvil que se desplaza a velocidad constante de 90 Km/h recorre un espacio que depende del tiempo que está circulando. Hay una relación entre las variables tiempo (x en horas) y espacio (y en kilómetros) que expresamos mediante la función $y = f(x) = 90 \cdot x$ (Espacio igual a velocidad por tiempo).
La fórmula $y = 90x$ es la expresión algebraica de la función. Mediante ella es posible conocer para cada valor del tiempo, el espacio recorrido y al revés.
Es claro que los valores que puede tomar el tiempo deben ser no negativos; por eso el dominio de esta función será el intervalo $D = Dom(f) = [0, +\infty)$.
Una tabla para la función estará formada por ciertos valores x y sus imágenes y respectivas:

x variable independiente tiempo (abscisa)	0	1	1,5	2	3	...
$y = f(x)$ variable dependiente espacio (ordenada)	0	90	135	180	270	...



Como sabemos, la expresión de la función es la de una función lineal, su representación gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas.

Un punto pertenece a la gráfica de f si y solo si su ordenada es la imagen de su abscisa

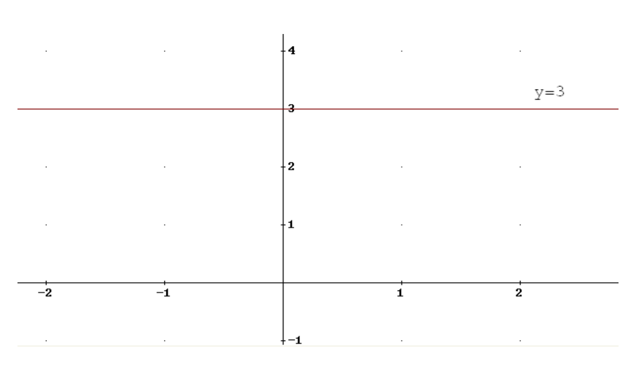
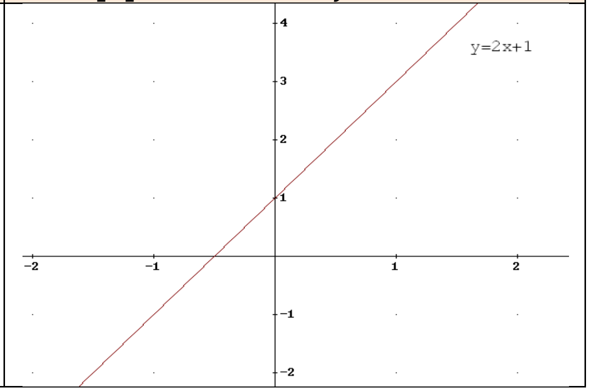
La función recorre el conjunto de reales positivos con lo que $Im(f) = [0, +\infty)$

Si queremos saber al cabo de cuánto tiempo llevara recorridos 198 Km bastará sustituir $y = 198$ en la expresión de la función:

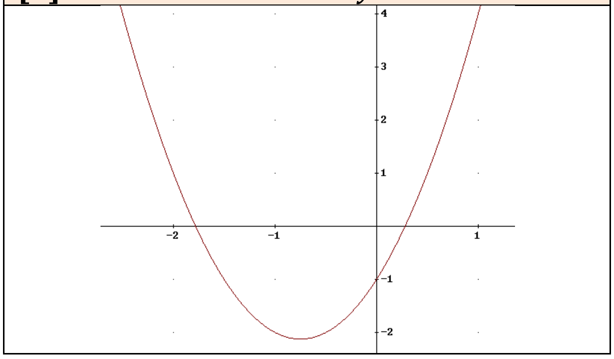
$$198 = 90x \Leftrightarrow x = 2{,}2\ horas = 2\ h\ 12\ min$$

2. Funciones elementales

Vamos a recordar algunas funciones de cursos anteriores.

[1] Función constante $y = k$	[2] Función afín $y = mx + n$
	

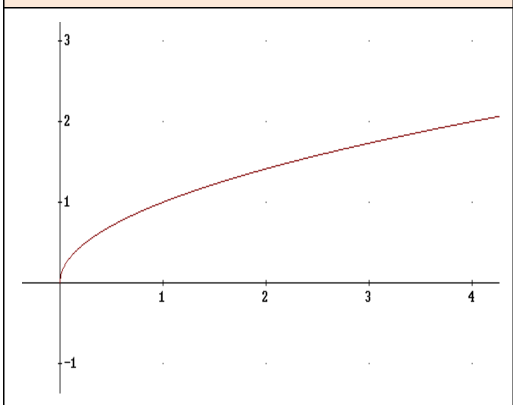
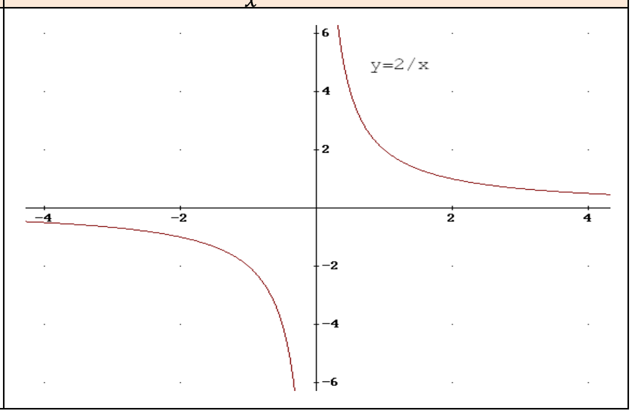
En la función $y = mx + n$, m es la pendiente de la recta (cantidad que aumenta y cuando x aumenta una unidad) y n es la ordenada en el origen, $(0, n)$.

[3] Función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$


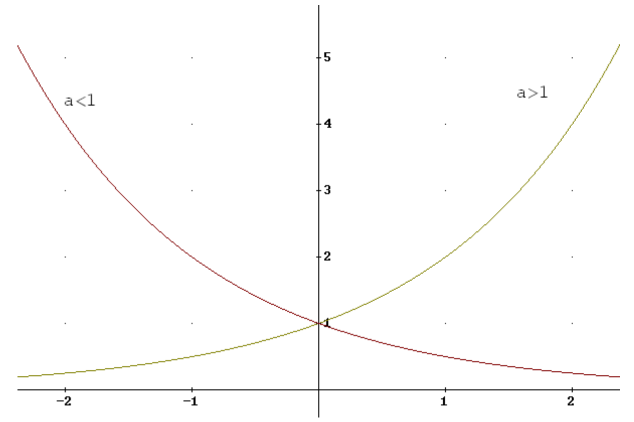
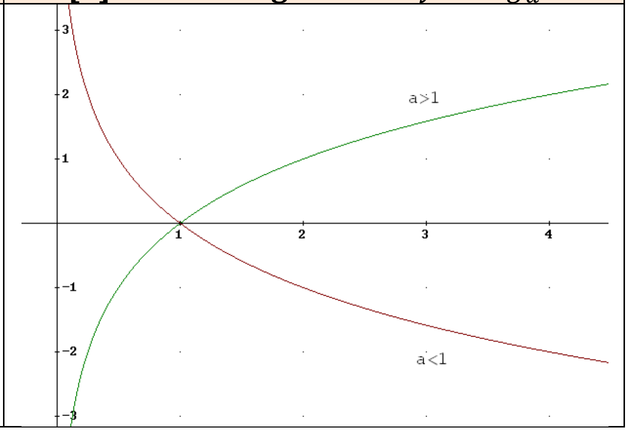
Su gráfica es una parábola de vértice $V\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$, corte con el eje OY el punto de coordenadas $C(0, c)$ y cortes con el eje OX los puntos $A(x_1, 0) y B(x_2, 0)$l siendo x_1 y x_2 las soluciones de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$.
Además, si $a > 0$ la parábola es cóncava $(\cup)$ y convexa $(\cap)$ si $a < 0$.

Las funciones anteriores son polinómicas, tienen por expresión algebraica un polinomio de grado n $y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ con $a_n \neq 0$.

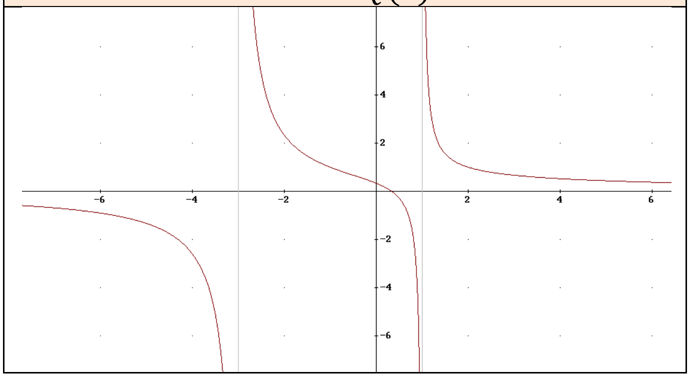
El dominio de este tipo de funciones es $D = \mathbb{R}$ porque siempre podemos calcular el valor de la función en cualquier valor real x.

[4] Función raíz cuadrada $y = \sqrt{x}$	[5] Función de proporcionalidad inversa $y = \frac{k}{x}$ (Hipérbola)
	

con dominio y recorrido $[0, +\infty)$ la [4] y $\mathbb{R} - \{0\}$ la [5].

[6] Función exponencial $y = a^x$	[7] Función logarítmica $y = log_a x$
	

$$f(x) = a^x : \begin{cases} Dom(f) = \mathbb{R} \\ Im(f) = (0, +\infty) \\ Pasa\ por\ P(0,1) \\ a > 1 \Longrightarrow Crece \\ a < 1 \Longrightarrow Decrece \end{cases} \qquad f(x) = log_a x : \begin{cases} Dom(f) = (0, +\infty) \\ Im(f) = \mathbb{R} \\ Pasa\ por\ Q(1,0) \\ a > 1 \Longrightarrow Crece \\ a < 1 \Longrightarrow Decrece \end{cases}$$

[8] Funciones racionales $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$


Son aquellas cuya expresión es la de un cociente de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

La función está definida en todos los valores reales salvo aquellos que anulen el denominador $Q(x)$. Por tanto el dominio es

$$Dom(f) = \mathbb{R} - \{x_i \in \mathbb{R} \ / \ Q(x_i) = 0\}$$

Ejemplo 2

Calculemos el dominio de la función $f(x) = \frac{3x-1}{x^2+2x-3}$

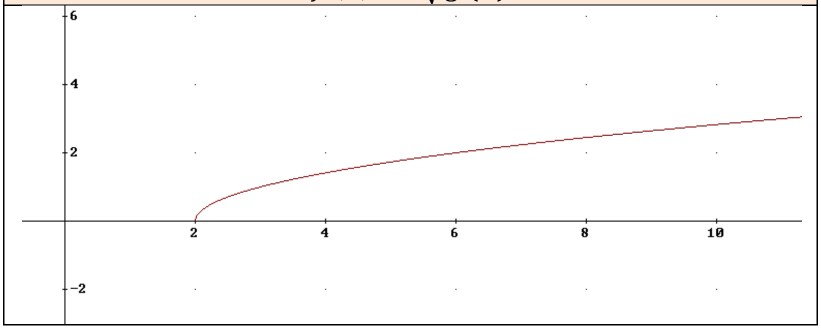
Calculamos los valores que anulan el denominador resolviendo la ecuación de segundo grado $x^2 + 2x - 3 = 0$; obtenemos las soluciones $x_1 = -3$ y $x_1 = 1$.

Por tanto $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-3, 1\}$.

---

[9] Funciones con radicales

$f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$



Las funciones con radicales cuyo índice es par solo están definidas para números reales mayores o iguales que cero. La que se representa arriba es la función $f(x) = \sqrt{x-2}$ que solo está definida para valores que cumplan $x - 2 \geq 0$, esto es $x \geq 2$. Su dominio es $D = [2, +\infty)$.

Ejemplo 3

Calculemos el dominio de la función $f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{x^2+2x-3}}$

$$x \in Dom(f) \Leftrightarrow \frac{3x-1}{x^2+2x-3} \geq 0$$

Debemos buscar los valores reales que hacen positiva o cero la expresión.
Para resolver este tipo de inecuaciones (cociente de polinomios) procedemos como sigue:
(i) Buscamos los valores que anulan numerador y denominador:

$$3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \ ; \ x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Estos tres valores dividen la recta real en cuatro intervalos.

(ii) Consideramos esos intervalos teniendo en cuenta si los valores anteriores anulan el numerador (cerramos el intervalo en ellos) o el denominador (dejamos abierto el intervalo en ellos) y determinamos el signo de nuestra expresión:

	(-∞, −3)	(−3, 1/3]	[1/3, 1]	[1, +∞)
Signo de $\frac{3x-1}{x^2+2x-3}$	−	+	−	+

El signo lo determinamos considerando el que tiene el resultado de sustituir un valor cualquiera de cada intervalo (no extremos) en la expresión.
El dominio de la función f viene dado por la unión de los intervalos con el signo positivo.

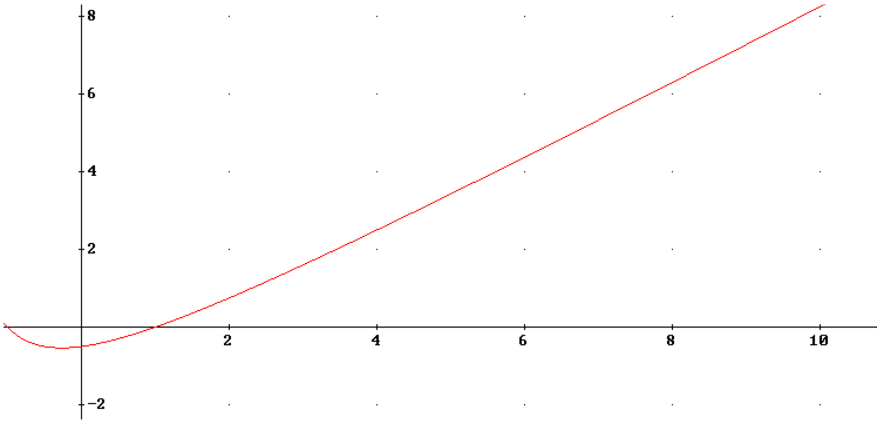
$$Dom(f) = (-3, 1/3] \cup [1, +\infty)$$

---

3. Limite de una función en el infinito

El concepto de límite tiene el sentido de "lugar" hacia el que se dirige una función en un determinado punto o en el infinito

Consideremos la siguiente gráfica de una cierta función $f(x)$

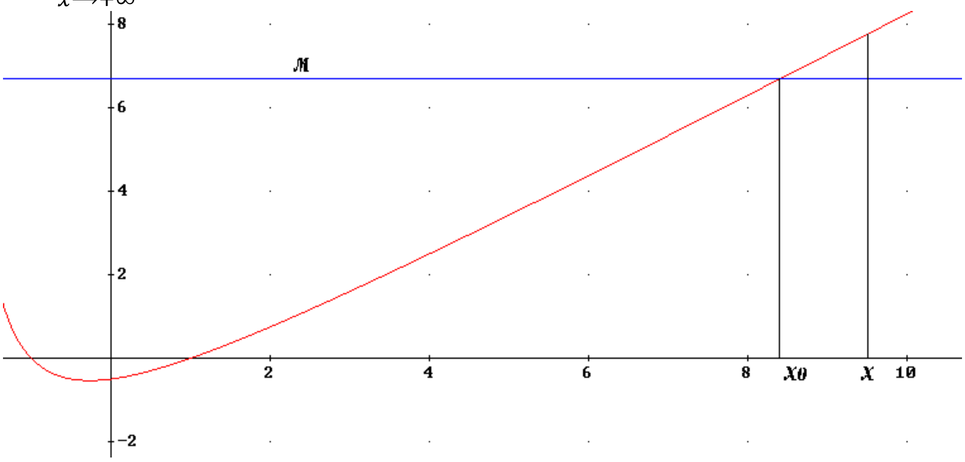


Observamos que a medida que el valor de la variable x se va haciendo más grande ($x \longrightarrow +\infty$) las imágenes $y = f(x)$ también se hacen, cada vez, más grandes ($f(x) \longrightarrow +\infty$). Este hecho lo escribiremos

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

y diremos que el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$ es $+\infty$.
Formalmente

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty \equiv \forall M \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in \mathbb{R} \ / \ x > x_0 \ \Longrightarrow f(x) > M$$

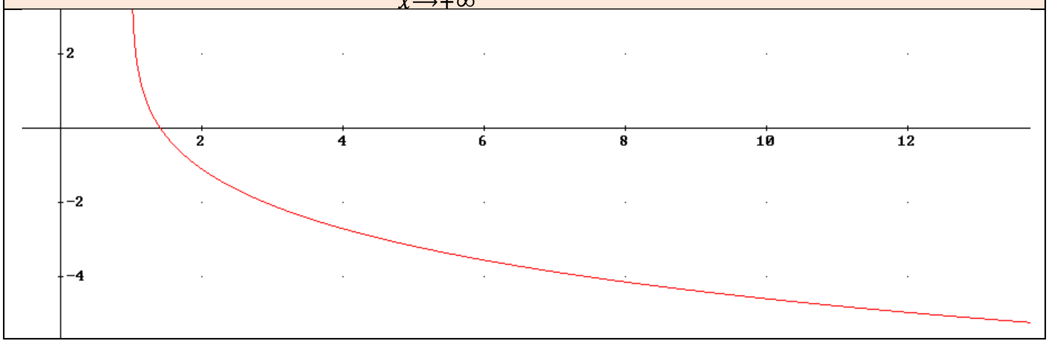


De forma análoga se definirán

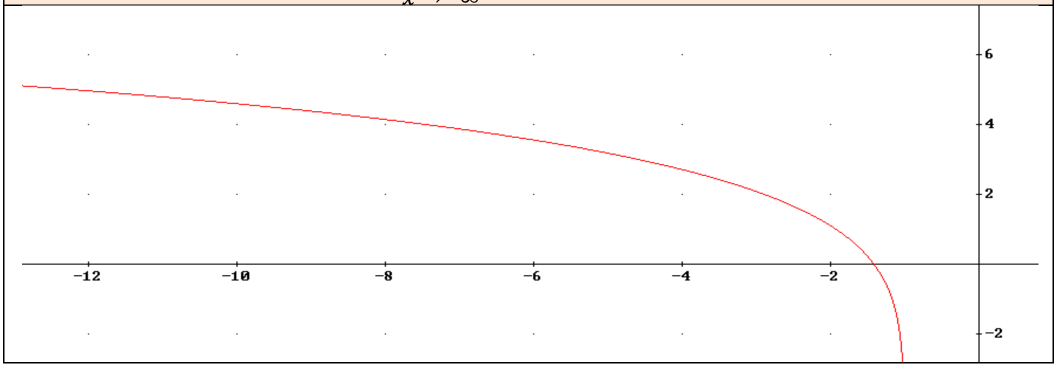
$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty \ ; \ \lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty \ ; \ \lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

que se corresponderán con situaciones gráficas como las siguientes

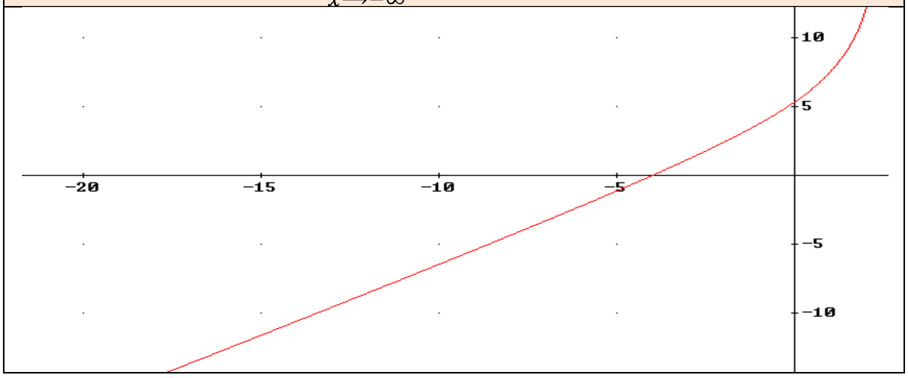
$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$



Aunque los resultados de los límites, en los cuatro casos, son $\pm\infty$ hay que decir que la función no tiene límite. Solo diremos que una función $f(x)$ tiene límite en el infinito cuando éste sea un número real b y lo escribiremos

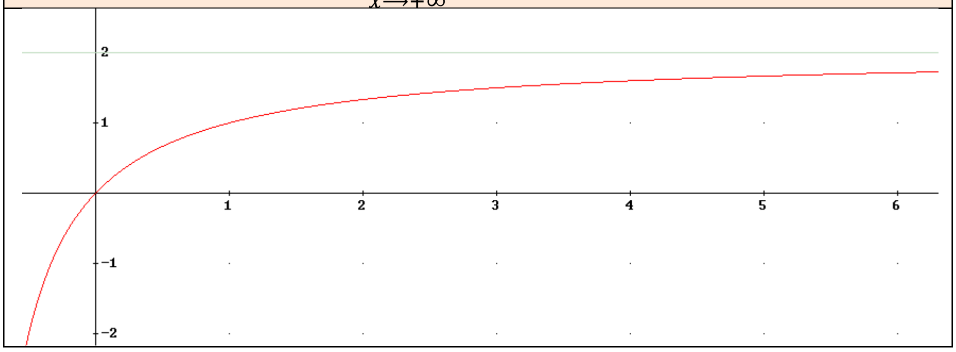
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \ \ o\ bien \ \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

La siguiente gráfica muestra la situación en que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

A medida que los valores de la variable x se hacen más grandes sus imágenes $f(x)$ se aproximan a 2 cada vez más.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$



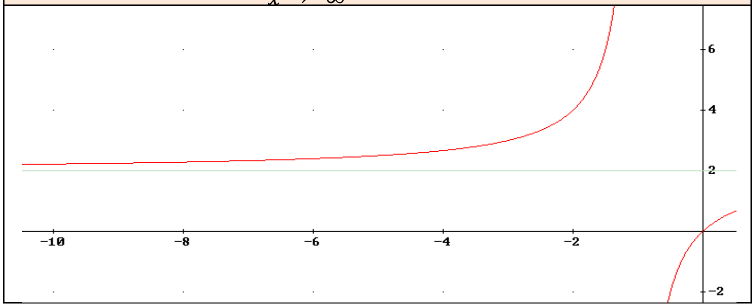
Formalmente:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \ \equiv \forall \varepsilon > 0 \ \exists M \in \mathbb{R} \ / \ x > m \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

De la misma forma se pueden dar

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$$



A medida que los valores de la variable x se hacen más negativos sus imágenes $f(x)$ se aproximan a 2 cada vez más.
En los dos casos diremos que la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal.

4. Límites y operaciones con funciones

4.1 Límite de la suma de funciones

Consideremos dos funciones $f(x)$ y $g(x)$. Vamos a calcular el límite de la función suma, $\lim_{x \to +\infty} [f(x) + g(x)]$, mediante una tabla en la que, en la primera columna escribimos los valores posibles $a \in \mathbb{R}$, $+\infty$ o $-\infty$ de $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y en la primera fila, los valores posibles $b \in \mathbb{R}$, $+\infty$ o $-\infty$ de $\lim_{x \to +\infty} g(x)$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ +\infty \\ -\infty \end{cases} \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = \begin{cases} b \in \mathbb{R} \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

La tabla se completa razonadamente,

$\lim_{x \to +\infty} [f(x) + g(x)]$	b	$+\infty$	$-\infty$
a	$a + b$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	IND
$-\infty$	$-\infty$	IND	$-\infty$

Los resultados IND son indeterminaciones $\infty - \infty$, es decir, situaciones en las que el resultado puede ser cualquier valor; en efecto si sumamos cantidades, de signos contrarios, todo lo grandes que podamos imaginar, el resultado es imprevisible. Habrá que analizarlo mediante métodos que veremos.

4.2 Límite del producto de funciones

Partimos de las siguientes posibilidades en cuanto a los límites de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ distinguiendo además que los valores $a, b \in \mathbb{R}$ sean nulos o no:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} a \in \mathbb{R} \;\; a \neq 0 \\ 0 \\ +\infty \\ -\infty \end{cases} \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = \begin{cases} b \in \mathbb{R} \;\; b \neq 0 \\ 0 \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

$\lim_{x \to +\infty} [f(x) \cdot g(x)]$	$b \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$a \neq 0$	$a \cdot b$	0	$+\infty \; si \; a > 0$ $-\infty \; si \; a < 0$	$-\infty \; si \; a > 0$ $+\infty \; si \; a < 0$
0	0	0	IND	IND
$+\infty$	$+\infty \; si \; b > 0$ $-\infty \; si \; b < 0$	IND	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty \; si \; b > 0$ $+\infty \; si \; b < 0$	IND	$-\infty$	$+\infty$

Ahora, el tipo de indeterminación que aparece es $0 \cdot \infty$ porque al multiplicar cantidades que se aproximan a 0 tanto como queramos por cantidades (positivas o negativas) todo lo grandes que queramos, el resultado puede ser cualquier valor. Se necesitan técnicas de resolución.

4.3 Límite del cociente de funciones

Partimos de las mismas posibilidades en cuanto a los límites de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ del apartado anterior:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \begin{cases} a \in \mathbb{R} \;\; a \neq 0 \\ 0 \\ +\infty \\ -\infty \end{cases} \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = \begin{cases} b \in \mathbb{R} \;\; b \neq 0 \\ 0 \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$	$b \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$a \neq 0$	$\frac{a}{b}$	$\pm\infty$	0	0
0	0	IND	0	0
$+\infty$	$+\infty$ *si* $b > 0$ $-\infty$ *si* $b < 0$	$\pm\infty$	IND	IND
$-\infty$	$-\infty$ *si* $b > 0$ $+\infty$ *si* $b < 0$	$\pm\infty$	IND	IND

Aparecen dos nuevas indeterminaciones, $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$, que resolveremos con las técnicas adecuadas.

Los límites $\lim_{x \to +\infty} \frac{a}{x^k} = 0$ se llaman infinitésimos y aparecerán muy frecuentemente.

4.4 Límite de potencias

En este apartado estudiamos el límite de funciones potenciales $f(x)^{g(x)}$ distinguiendo casos según el siguiente cuadro:

$\lim_{x \to +\infty} f(x)^{g(x)}$	$b \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$a \neq 0$	a^b	1	$+\infty$ *si* $a > 1$ 0 *si* $0 < a < 1$ *IND si* $a = 1$	0 *si* $a > 1$ $+\infty$ *si* $0 < a < 1$ *IND si* $a = 1$
0	0	IND	0	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$ *si* $b > 0$ 0 *si* $b < 0$	IND	$+\infty$	0

Aparecen nuevas indeterminaciones, $0^0, (+\infty)^0$ y 1^∞, de las cuales solo estudiaremos la última.

4.5 Límites de funciones con radicales

En las expresiones con radicales debemos tener en cuenta el índice de la raíz y que $\sqrt[n]{+\infty} \longrightarrow +\infty$; $\sqrt[impar]{-\infty} \longrightarrow -\infty$;

y aplicaremos adecuadamente que

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to +\infty} f(x)}$$

5. Cálculo de límites en $+\infty$

5.1 Límite de un polinomio

$a_n \neq 0$

$$\lim_{x \to +\infty} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = \begin{cases} +\infty & si\ a_n > 0 \\ -\infty & si\ a_n < 0 \end{cases}$$

El límite, $+\infty$ o $-\infty$, lo determina el signo del coeficiente del monomio de mayor grado. El resto de términos no influyen, son insignificantes.

Por ejemplo $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x^4 + x^3 + 7x + 1) = -\infty$ porque $-2 < 0$.

5.2 Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

[1] Se produce en el cálculo del límite de un cociente de polinomios.

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios con una indeterminada en x y grados n y m respectivamente.

El límite $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ produce la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Se puede proceder de varias formas. Para ello vamos a calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^3+5x-1}{x^3+4}$

(i) Como los términos distintos del monomio de mayor grado son insignificantes, en cuanto al límite en el infinito, podemos suprimirlos tanto en el numerador como en el denominador:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3+5x-1}{x^3+4} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\cong} \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3}{x^3} = 2$$

(ii) Otra forma de proceder se basa en dividir, numerador y denominador, por la mayor potencia de la variable como vemos en el ejemplo siguiente:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3+5x-1}{x^3+4} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\cong} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2x^3+5x-1}{x^3}}{\frac{x^3+4}{x^3}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{5x}{x^3}-\frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}+\frac{4}{x^3}} == \lim_{x \to +\infty} \frac{2+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{1+\frac{4}{x^3}} = 2$$

(iii) También podemos aplicar la *regla de los grados* que nos dice:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m} & si\ n = m \\ 0 & si\ n < m \\ \pm\infty & si\ n > m\ y\ \frac{a_n}{b_m} \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases} \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^3+5x-1}{x^3+4} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\cong} \frac{2}{1} = 2$ porque son del mismo grado.

[2] Se produce en el cálculo del límite de un cociente con radicales y se resuelve dividiendo, numerador y denominador, por la mayor potencia de la variable, compensada por el radical, como vemos en el ejemplo siguiente

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+5x-1}+3x}{2x+4} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\cong} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\sqrt{4x^2+5x-1}+3x}{x}}{\frac{2x+4}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\sqrt{4x^2+5x-1}}{x}+\frac{3x}{x}}{\frac{2x}{x}+\frac{4}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{\frac{4x^2+5x-1}{x^2}}+\frac{3x}{x}}{\frac{2x}{x}+\frac{4}{x}} =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}+3}{2+\frac{4}{x}} = \frac{\sqrt{4}+3}{2} = \frac{5}{2}$$

5.3 Indeterminación $\infty - \infty$

[1] Se produce en el cálculo del límite de sumas de funciones racionales.

Los límites del tipo $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{R(x)}{S(x)}\right]$, siendo P, Q, R y S polinomios en x, pueden producir indeterminaciones $\infty - \infty$ que se resuelven efectuando la operación como vemos en el siguiente ejemplo:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3-1}{x^2+4}-\frac{x^2-2}{2x}\right)\overset{\infty-\infty}{\triangleq}\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x^3-1)\cdot 2x-(x^2-2)\cdot(x^2+4)}{(x^2+4)\cdot 2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^4-2x^2-2x+8}{2x^3+8x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\triangleq}+\infty$$

[2] Se produce en el cálculo de límites donde intervienen radicales y se resuelven multiplicando, y dividiendo, por la expresión conjugada. Por ejemplo:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+5x-1}-2x\right)\overset{\infty-\infty}{\triangleq}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+5x-1}-2x\right)\cdot\left(\sqrt{4x^2+5x-1}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+5x-1}+2x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x-1}{\sqrt{4x^2+5x-1}+2x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\triangleq}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5x}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{4x^2+5x-1}}{x}+\frac{2x}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5-\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}+2}=\frac{5}{4}$$

5.4 Indeterminación 1^{∞}

Las resolvemos aplicando la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)]^{g(x)}\overset{1^{\infty}}{\triangleq}e^{\lim_{x\to+\infty}g(x)\cdot[f(x)-1]}$$

Ejemplo 4

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-3}{1+x}\right)^{x^2-3}\overset{1^{\infty}}{\triangleq}e^{\lim_{x\to+\infty}\left[(x^2-3)\cdot\left(\frac{x-3}{1+x}-1\right)\right]}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left[(x^2-3)\cdot\left(\frac{-4}{1+x}\right)\right]}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x^2+12}{1+x}}\overset{e^{-\infty}}{\triangleq}0$$

---

6. Cálculo del límites en $-\infty$

Hasta ahora, todo el estudio se ha realizado cuando $x\longrightarrow+\infty$ Para el cálculo de límites cuando $x\longrightarrow-\infty$, ultilizaremos $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(-x)$.

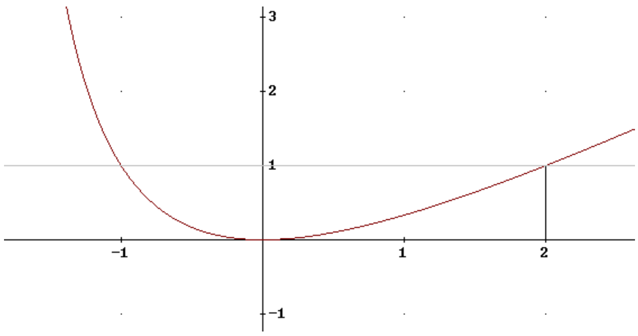
Ejemplo 5

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-2x^3-1}{x^2+4}+\frac{x^2-2}{2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3-1}{x^2+4}-\frac{x^2-2}{2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x^3-1)\cdot 2x-(x^2-2)\cdot(x^2+4)}{(x^2+4)\cdot 2x}=+\infty$$

---

7. Limite de una función en un punto

La siguiente gráfica muestra parte de la representación de la función $f(x)=\frac{x^2}{x+2}$



x	f(x)
1,9	0,92564103
1,99	0,99250627
1,999	0,99925006
1,9999	0,999925
2,01	1,00750623
2,001	1,00075006
2,0001	1,000075

Podemos observar que si nos acercamos al valor $x=2$, las imágenes de la función se aproximan a 1 que es el valor de la función en dicha abscisa.
Formalizamos el hecho escribiendo $\lim_{x\to 2}f(x)=1$.

En las funciones que vamos a utilizar (salvo a trozos), cuando queramos calcular su límite en un punto, lo que haremos, en primer lugar, es sustituir el valor en la expresión de la función; si el resultado es un número real, ese será su límite.

En el ejemplo del comienzo, para calcular $\lim_{x\to 2}\frac{x^2}{x+2}$ sustituimos $x=2$ en la expresión $\frac{x^2}{x+2}$, $\frac{2^2}{2+2}=1$ y así $\lim_{x\to 2}\frac{x^2}{x+2}=1$

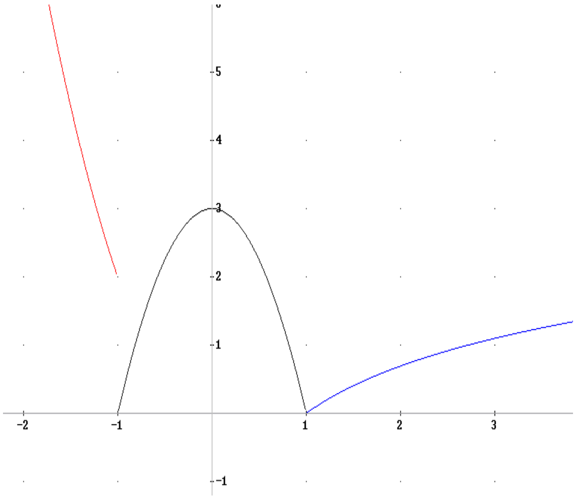
En general, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ cuando para valores de x muy próximos a a, los valores de la función , en ellos, se aproximan a L. En la definición obviamos el punto $x = a$, siempre nos acercamos a a pero no lo alcanzamos.

7.1 Límites laterales

En ciertas ocasiones es necesario distinguir entre acercarse al punto por su izquierda o por su derecha. Hay que introducir la idea de límites laterales.

Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & si\ x \leq -1 \\ -3x^2 + 3 & si\ -1 < x < 1 \\ Lx & si\ x \geq 1 \end{cases}$$ cuya gráfica se muestra.



Para determinar $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ lo primero que observamos es que la definición de la función cambia según me acerque a $x = -1$ por su izquierda o su derecha. Por tanto necesitamos introducimos la noción de límite s laterales (por la izquierda y por la derecha) de una función en un punto que representaríamos, en nuestro ejemplo, por $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)\ y \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$.

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (2x^2) = 2\ ;\ \lim_{x \to -1^+} (-3x^2 + 3) = 0$$

Como los límites laterales no coinciden, concluimos que la función no tiene límite en $x = -1$.

En el caso de $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} (-3x^2 + 3) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (Lx) = 0 \end{cases}$ Coinciden los límites laterales y, por tanto la función tiene límite en $x = 1$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$.

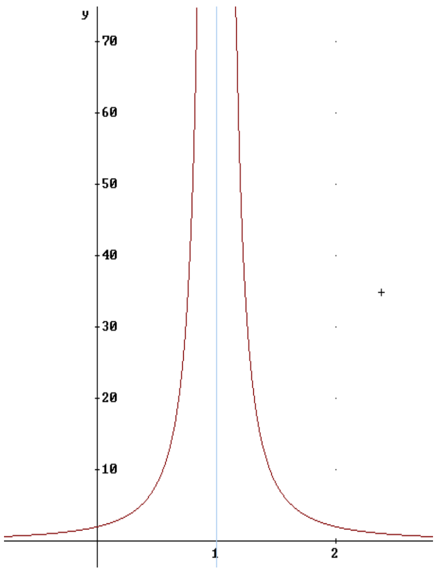
En general

$$\boxed{Existe\ \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow Existen\ \lim_{x \to a^-} f(x)\ y \lim_{x \to a^+} f(x)\ y \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)}$$

7.2 Límites infinitos

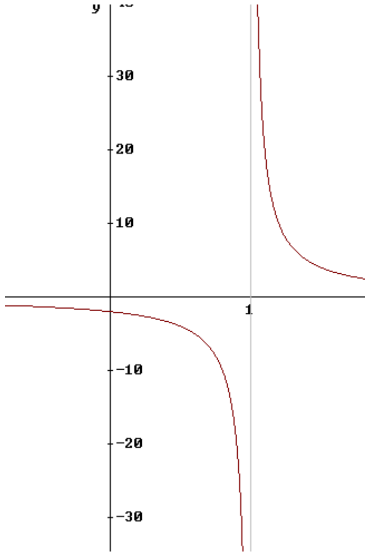
Los límites en un punto pueden dar como resultado $\pm\infty$.

Por ejemplo, $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2}{(x-1)^2} \overset{\frac{2}{0^+}}{=} +\infty$



En otras ocasiones es necesario determinar límites laterales:

Por ejemplo, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2}{x-1} \overset{\frac{2}{0}}{=} \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{2}{x-1} \overset{\frac{2}{0^-}}{=} -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{2}{x-1} \overset{\frac{2}{0^+}}{=} +\infty \end{cases}$



En ambos ejemplos diremos que la recta $x = 1$ es una asíntota vertical .

7.3 Indeterminación $\frac{0}{0}$

[1] Se produce en el cálculo de límites del tipo $\lim\limits_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$ cuando a es raíz de P y Q.

Ejemplo 6

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)\cdot(x+3)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+3) = 4$ donde hemos factorizado el polinomio $x^2 + 2x - 3$ para resolver la indeterminación.

Si $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x-1}$, $f(1)$ no está definido pero si existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 4$.

[2] Se produce también en el cálculo de límites donde aparecen radicales.

Ejemplo 7

$$\lim_{x\to -1} \frac{1-\sqrt{x^2-2x-2}}{x^2-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to -1} \frac{\left(1-\sqrt{x^2-2x-2}\right)\cdot\left(1+\sqrt{x^2-2x-2}\right)}{(x^2-1)\cdot\left(1+\sqrt{x^2-2x-2}\right)} =$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{-x^2+2x+3}{(x^2-1)\cdot\left(1+\sqrt{x^2-2x-2}\right)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to -1} \frac{-(x+1)\cdot(x-3)}{(x+1)\cdot(x-1)\left(1+\sqrt{x^2-2x-2}\right)} = \lim_{x\to -1} \frac{-(x-3)}{(x-1)\left(1+\sqrt{x^2-2x-2}\right)} = \frac{4}{-2\cdot 2} = -1$$

donde, para resolver la indeterminación, hemos empezado multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada del numerador y después hemos factorizado los polinomios que aparecen.