Geometría del espacio

1º) Dados los vectores $\vec{u}= (2,-1,0)$ y $\vec{v} = (-1,1,2)$, calcula:
a) sus módulos.
b) su producto escalar.
c) el coseno del ángulo que forman.
d) el valor de w_1 para que el vector $\vec{w}(w_1, 2, 3)$ sea perpendicular a $\vec{u}$.

2º) Dados los vectores $\vec{u}= (u_1, 2, -2)$ y $\vec{v} = (4, v_2, 3)$, determina u_1 y v_2 para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares y además el módulo de $\vec{v}$ sea 13.

3º) Dados los vectores $\vec{u}= (1,-1,0)$ y $\vec{v} = (2,3,-1)$,
a) calcula un vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y unitario y otro con módulo 3.
b) halla el área del paralelogramo que determinan los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

4º) Calcula el área del triángulo de vértices los puntos $A(1,0,2), B(2,2,2)\ y\ C(3,-1,2)$.

Solución

$5/2\ u^2$

5º) Dados los vectores $\vec{u}= (1,-1,2)$, $\vec{v} = (-1,-1,3)$ y $\vec{w} = (5,2,1)$, calcula:
a) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w})$
b) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$

6º) Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $2i, 3j\ y\ 4k$.[**Sol:** $24\ u^3$]

7º) Averiguar si los puntos $O(0,0,0), A(1,-1,3), B(5,2,-2)\ y\ C(-3,-4,8)$ son coplanarios.

8º) Determina de todas las formas posibles las ecuaciones del plano determinado por los puntos $P(3,0,0), Q(0,-2,0)\ y\ R(0,0,1)$.

9º) Representa el plano de ecuación $2x + y + 4z - 2 = 0$ (Nota: Escribe la ecuación segmentaria)

10º) Dados los vectores $\vec{u}, \vec{v}\ y\ \vec{w}$ tales que $|\vec{u}|=3$, $|\vec{v}|=1$ y $|\vec{w}|=4$ y además $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}= \vec{0}$, calcula la suma $\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{w} + \vec{u}\cdot\vec{w}$ (Observa cómo estarán dispuestos $\vec{u}, \vec{v}\ y\ \vec{w}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con sentidos opuestos y sobre $\vec{w}$. [**Sol:** -13]

11º) Los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ cumplen $|\vec{u}|=5$ y $|\vec{v}|=2$. Además $\vec{u}\cdot\vec{v}= 10$. Calcula $\vec{u}\times\vec{v}$
[**Sol:** Observa que $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ son paralelos, luego será 0 el producto vectorial]

12º) Demuestra que $(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) = 2\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$

13) Halla el vector ortogonal a $\vec{u} = (2,3,-1)$ y $\vec{v} = (0,1,1)$ que tenga la tercera componente igual a 1. [**Sol:** $\vec{u} = (2,-1,1)$]

14º) Los puntos $A(3,1,1)$, $B(2,4,1)\ y\ C(-1,2,3)$ son vértices de un paralelogramo. Calcula el cuarto vértice, el perímetro del paralelogramo y su área. [**Sol:** $D(0,-1,3)$, $P = 2(\sqrt{10} + \sqrt{17})\ y\ Area = \sqrt{161}\ u^2$]

15º) Determina k para que los puntos $A(1,-1,2), B(-2,1,3), C(0,1,0)\ y\ D(k-1, k+1, 2)$ sean coplanarios. [**Sol:** $k = -2/13$)

16º) Determina la ecuación general del plano que pasa por el punto $P(3,3,1)$, es perpendicular al plano OXY y que tiene un vector director perpendicular a los vectores $\vec{u} = (1,1,1)$ y $\vec{v} = (2,-1,0)$.
[**Sol:** $2x - y - 3 = 0$]

17º) Halla el volumen del tetraedro determinado por los puntos $A(4,0,0), B(0,4,0), C(0,0,4)$ y $D(9,-1,0)$. [Sol: 32/3 u²]

18º) Escribe las ecuaciones paramétricas, continua y general de la recta que pasa por el punto $A(-1,2,5)$ y tiene la dirección del vector $\vec{u}=(1,-2,1)$.

19º) Dada la recta de ecuación $r \equiv \begin{cases} x-3y+z=1 \\ \quad y-5z \;\;=2 \end{cases}$

a) **Escríbela en forma paramétrica y continua.**
b) **Halla la ecuación de la recta s paralela a r que pasa por el origen de coordenadas.**
c) **Escribe la recta s como intersección de planos.**

20º) Dado el plano de ecuación $x-3y+2z=0$

a) **Halla la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por el punto $A(1,-1,3)$.**
b) **Halla el punto de intersección de la recta y el plano.**

21º) Dados los puntos $A(1,1,-1), B(2,-3,4)$ y $C(a,0,b+1)$ determina a y b para que los puntos A, B y C están alineados. [Sol: $a=5/4$; b = −3/4]

22º) Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto medio del segmento de extremos $A(1,2,3)$ y $B(3,-2,1)$ y que tiene un vector director perpendicular a los vectores $\vec{u}=(2,-2,3)$ y $\vec{v}=(1,1,2)$.

23º) Dados los puntos $A(2,6,-3)$ y $B(3,3,-2)$ determina los puntos en los que la recta que pasa por A y B corta a los planos coordenados.

24º) Halla la ecuación general del plano determinado por las rectas

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{2} \qquad y \qquad \frac{x+3}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{2}$$

[Sol: 5x+9y+2z=0. Observa que las rectas son paralelas]

25º) Escribe las rectas del apartado anterior en forma de intersección de planos.

26º) Escribe la ecuación general de un plano que pasa por el punto $A(3,2,-1)$ y contiene a la recta

$$\begin{cases} x=2-t \\ y=-3+t \\ z=4+2t \end{cases}$$

[Sol: 5x+y+2z-15=0]

27º) Halla la ecuación del plano que pasa por el punto A(2,1,0) y contiene a la recta de ecuación

$$\begin{cases} 3x-y+z=2 \\ 2x+y-z=3 \end{cases}$$

[Sol: -y+z+1=0]

28º) Comprueba si la recta de ecuación $r \equiv \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-5}{-2}=-z+3$ está o no contenida en el plano $\pi \equiv 3x-2y+z-10=0$.

29º) Dadas las rectas r: $\begin{cases} x-y+z=2 \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$ y s: $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$, calcula la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.
[Sol: -11x+16y-14z+25=0]

30º) Halla la ecuación del plano paralelo al plano $x-y+3z-1=0$ que pasa por punto en que la recta $\begin{cases} x-y+z=2 \\ 2x+3y-z=1 \end{cases}$ corta al plano OXZ.

[**Sol**: x-y+3z-4=0]

31º) Determina la ecuación del plano que pasa por el punto $A(1,0,-1)$, es perpendicular al plano $2x-y+z+1=0$ y paralelo a la recta r: $\begin{cases} x-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$

[**Sol**: x-2y-4z-5=0]

32º) Halla el valor de k para que la recta r: $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ x+y-z=2 \end{cases}$ y el plano $kx-y+z=5$ sean paralelos.

[**Sol**: $k=-1$]

33º) Halla la posición relativa de las rectas r: $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 3x+y=4 \end{cases}$ y s: $\begin{cases} 4x+3y-z=5 \\ 2x-7y+2z=5 \end{cases}$

[**Sol**: Se cortan $en\ P(19/13,-5/13,-4/13)$]

34º) Determina la ecuación de la recta r que pasa por el punto $A(1,0,2)$ y es perpendicular al plano determinado por el origen de coordenadas y la recta s: $\begin{cases} x=2z-1 \\ y=z-2 \end{cases}$

[**Sol**: $\frac{x-1}{2}=-y=\frac{2-z}{3}$]

35º) Determina la posición relativa de los planos

a) $x-y+z=2$; $3x+2y-z=2$ y $4x+3y-2z=2$ [**Sol**: Se cortan en un punto]

b) $x+y+z=2$; $3x+2y-z=2$ y $4x+3y=2$ [**Sol**: Se cortan de forma prismática]

36º) Halla la proyección ortogonal del punto $P(-1,1,-1)$ sobre la recta r: $\begin{cases} x=-2t \\ y=10+3t \\ z=4t \end{cases}$

[**Sol**: $Q(2,7,-4)$]

37º) Calcula el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A(4, 0, 0) , B(0, 4, 0) , C(0, 0, 4) y D(9, -1, 0).

[**Sol**: $V=\ 32/\,3\,u^3$]

38º) Halla la ecuación de un plano que, pasando por los puntos $A(0,2,0)$, $B(0,0,2)$, corta al eje OX en un punto C de forma que el área del triángulo ABC es 4.

[**Sol**: $2x\pm\sqrt{6}(y+z-2)=0$]

39º) Obtén la ecuación del plano que es ortogonal a la recta $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=z-2$ y pasa por el punto $P(1,-1,2)$. Calcula el punto del plano más próximo al punto $Q(3,-4,3)$

[**Sol**: $2x-3y+z-7=0$ y el punto $Q`(1,-1,\ 2)$]

40º) Determina el ángulo que forman los planos $3x-2y+4z-2=0$ y $x+y-z+5=0$

[**Sol**: 71,24º]

41º) Discute en función de k la posición de la recta $x=y=z$ y el plano $x+y+kz+1=0$.

[**Sol**: $k=-2$ serán paralelo s y en caso contrario se cortan]

42º) Determina a y b para que las rectas siguientes se corten ortogonalmente:

r: $\begin{cases} 2x+y=0 \\ ax+-z=0 \end{cases}$ s: $\begin{cases} x+by=3 \\ y+z=3 \end{cases}$

[**Sol**: Obliga a que se corten y además ortogonalmente ; $a=1, b=1$]

43�) Determina la posici�n relativa de la recta r: $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y-4}{-2}=z+3$ **y el plano** $2x-y+3z=4$

[**Sol**: Se cortan en el punto $P(\,19/3,\ 34/15,-32/15)$]

44�) Halla la ecuaci�n de la recta que pasa por el punto $P(1,1,1)$ **y es paralela a los planos π y π' de ecuaciones** $\pi\equiv x+y+z=1$ **y** $\pi'\equiv 3x-y+2z=3$.

[**Sol** $\begin{cases} x=1+3t \\ y=1+t \\ z=1-4t \end{cases}$

45�) Se consideran las rectas r: $x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ **y** s: $x-1=y-2=z-1$

a) Determina su posici�n relativa. [Sol: Se cruzan]

b) **Calcula la distancia entre ellas.** [**Sol**: $\frac{\sqrt{6}}{3}$]

46�) Se consideran las rectas r: $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 3x+2y+z=3 \end{cases}$ **y** s: $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z-1}{-1}$

a) Determina su posici�n relativa. [**Sol**: Paralelas y distintas]

b) Calcula la distancia entre ellas. [**Sol**: $\sqrt{\frac{17}{26}}$]

47�) Entre todos los planos que contienen a la recta r: $\begin{cases} x+2y+6z-5=0 \\ x-y-z+1=0 \end{cases}$

a) Halla la ecuaci�n del plano π **que es paralelo al plano** $\alpha: 3x+4z-4=0$ [**Sol**: 3x+4z-3=0]

b) Halla la distancia entre π **y** α **.** [**Sol** 1/5 u]

48�) Halla el punto de la recta r: $x=-2y=-2z$ **cuya distancia al origen es el doble que su distancia a la recta** r: $\begin{cases} x+y=0 \\ z=3 \end{cases}$

[**Sol**: $P(-3,3/2,3/2)$]

49�) Halla las ecuaciones del lugar geom�trico de todos los puntos del plano $x=y$ **, que distan 1 del plano** $2x-y+2z=2$.

[**Sol**: formar� dos rectas : r: $\begin{cases} 2x-y+2z-5=0 \\ x-y=0 \end{cases}$ y s: $\begin{cases} 2x-y+2z+1=0 \\ x-y=0 \end{cases}$]

50�) Halla la distancia del punto $P(2,-1,3)$ **a la recta** r: $\begin{cases} x=3t \\ y=5t-7 \\ z=2t+2 \end{cases}$

[**Sol**: $\sqrt{3}$ u]

51�) Calcula la recta sim�trica a r: $\begin{cases} x=2+t \\ y=3-3t \\ z=-5t \end{cases}$ **respecto del plano** π: $x-y+2z+7=0$

[**Sol**: $\begin{cases} x=3+3t \\ y=-5t \\ z=-5-t \end{cases}$

52�) Determina el valor de a para que los planos $3x+y-z=0$, $2x+y+z=3$ y $x-y+az=6$ **se corten dos a dos.**

[**Sol** $a=-7$]

53�) Calcula la distancia entre los planos $x-y-2z=1$ **y** $2x-2y-4z=2$

[**Sol**: 0]

54º) Halla la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y corta (se apoya) en las rectas r: $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{2}=z$ **y** $s: x = 2y = z - 1$

Nota: La recta podemos darla como intersección de dos planos π_1 y π_2 ,siendo π_1 el plano que pasa por P y contiene a la recta r y π_2 el plano que pasa por P y contiene a la recta s

[**Sol:** $\frac{x}{2}=y=z$]

55º) Halla el punto Q **simétrico del punto** $P(2,0,1)$ **respecto de la recta** r **que pasa por el punto** $A(0,3,2)$ **y es paralela a la recta** s: $\begin{cases} x+2y=0 \\ z=0 \end{cases}$

[**Sol**: $Q(\frac{18}{5},\frac{16}{5},3)$]

56º) Obtén la perpendicular común a las rectas $r: x = y = z$ **y** $s: x = 2y = 3z$

[**Sol**: $\begin{cases} x=-t \\ y=4t \\ z=-3t \end{cases}$

57º) Halla las coordenadas del punto simétrico del punto $P(2,4,2)$ **respecto del punto** $Q(1,2,3)$.

[**Sol**: $P'(0,0,4)$]

58º) Dada la recta r: $\begin{cases} x-2y+2z=3 \\ x+y-4z=3 \end{cases}$ **halla los puntos de** r **tales que su distancia al origen de coordenadas sea** $\sqrt{14}$ **u.**

[**Sol**: $P(-1/3,-10/3,-5/3)$ y $Q(11/3,2/3,1/3)$]

59º) Halla el ángulo que determinan las rectas r: $\begin{cases} x=3+2t \\ y=2+t \\ z=-3+2t \end{cases}$ **y** s: $\begin{cases} 3x-y+-5z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$

[**Sol**: 45º]

60º) Halla la recta que pasa por el punto $A(-1,\ 2,1)$**, corta a la recta** r **del ejercicio anterior y es paralela al plano** $x - y + 2z - 1 = 0$.

[**Sol**: $\begin{cases} x=-1+6t \\ y=2+t \\ z=1-2t \end{cases}$

61) Dados el plano $\pi \equiv x + 2y - z = 2$ **, la recta** $r \equiv \frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-5}{4}$ **y el punto** $P(-2,3,2)$, **perteneciente al plano** π**, se pide:**

a) Determinar la posición relativa de π **y** r.

b) Calcular la ecuación de la recta t, **contenida en** π, **que pasa por el punto** P **y que corta perpendicularmente a** r.

c) Sea Q **el punto de intersección de** r **y** t. **Si** s **es la recta perpendicular al plano** π **y que contiene a** P, **y** R **es un punto cualquiera de** s, **probar que la recta determinada por** R **y** Q **es perpendicular a** r.

62º) Dados el punto $P(1,-1,2)$, **y el plano** $\pi \equiv 2x - y + z - 11 = 0$ **, se pide:**

a) Determinar el punto Q **de intersección del plano** π **con la recta perpendicular a** π **que pasa por** P. **Hallar el punto** R **simétrico del punto** P **respecto del plano** π. [**Sol**: $Q'(3,-2,3)$]

b) Obtener la ecuación del plano paralelo al plano π **que contiene al punto** H **que se encuentra a** $5\sqrt{6}$ **unidades del punto** P **en el sentido del vector** $\overrightarrow{PQ}$.

63º) Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{2}$ y s: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=3-t \\ z=2 \end{cases}$ **se pide:**

a) Comprobar que se cruzan y calcular la distancia entre ellas. [**Sol**: $d=\frac{\sqrt{63}}{3}$]

b) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s. [**Sol**: 2x+4y-7z-23=0]

c) Hallar el ángulo que forma la recta r con el plano $y = 0$. [**Sol** 10,57°]

EvAU Modelo 2016-2017. Opción A

64º) Dados los puntos $A(2,1,1)$, $B(0,0,-3)$ y $P(1,1,1)$, se pide:

a) Hallar la ecuación del plano que contiene a los tres puntos.

b) Hallar el área del triángulo formado por A, B y P.

c) Hallar la distancia del punto P a la recta que pasa por A y B.

EvAU Modelo 2016-2017. Opción B

65º) Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = \frac{\alpha}{3} \end{cases}$ $\alpha \in \mathbb{R}$ **y el plano** $\pi \equiv x - 2y + 3z - 4 = 0$, **calcula la recta proyección de r sobre π.** $\left[\textit{Sol}: \begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0 \\ 11x - 8y - 9z - 11 = 0 \end{cases} \right]$