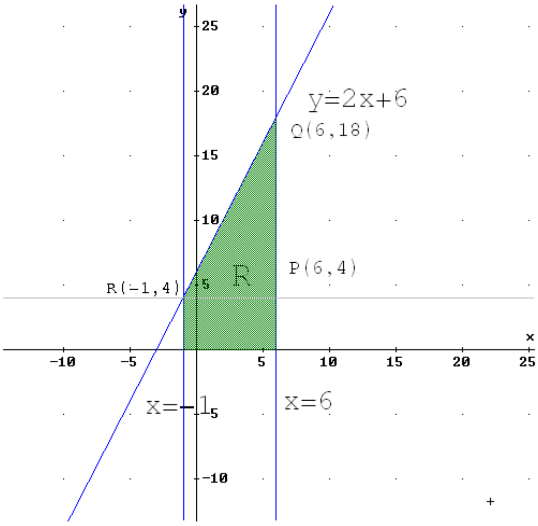
Aplicaciones de la integral definida al cálculo de áreas

1º) Interpreta geométricamente el área que define la integral $\int_{-1}^{6}(2x+6)dx$ y obtenla.

Resolución

Geométricamente, la integral $\int_{-1}^{6}(2x+6)\,dx$ representa el área de la región del plano R limitada por la recta $y = 2x + 6$, las verticales $x = -1$, $x = 6$ y el eje de abscisas OX.



$Área(R) = Área(rectángulo) + Área(triángulo) = 7 \cdot 4 + \frac{7\cdot 14}{2} = 77\,u^2$.

Calculando la integral definida, obtenemos:

$$\int_{-1}^{6}(2x+6)dx = [x^2+6x]_{-1}^{6} \underbrace{=}_{Barrow} 36+36-(1-6) = 77\,u^2$$

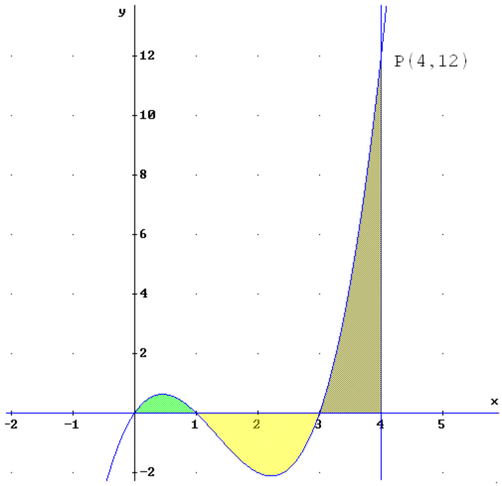
2º) Calcula el área encerrada por la curva $y = x^2 - 3x - 4$, el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 3$.

Solución

$$A = \frac{43}{2}u^2$$

3º) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.

Resolución



La región del plano limitada es la que se muestra en la gráfica de la derecha. Su área viene dada por la suma de las áreas de las tres regiones en que se divide:

Los cortes de la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ con el eje OX son: $x^3 - 4x^2 + 3x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$ $(0,0)$; $(1,0)$; $(3,0)$

$$A_1 = \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{5}{12}u^2$$

$$A_2 = -\int_1^3 (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx = -\left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_1^3 = \frac{8}{3}u^2$$

$$A_3 = \int_3^4 (x^3 - 4x^2 + 3x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_3^4 = \frac{59}{12}u^2$$

El área buscada es: $A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} + \frac{59}{12} = 8\,u^2$

4º) Calcula el área del recinto limitado por la curva $y = x^3 - 1$, el eje OY y la recta $y = 7$.

Resolución

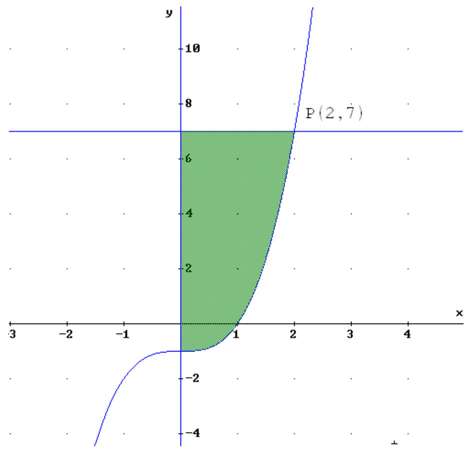
La región del plano limitada es la que se muestra en la siguiente gráfica:

Hallamos el punto de corte entre la curva $y = x^3 - 1$ y la recta $y = 7$:

$x^3 - 1 = 7 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$ Se cortan en el punto $P(2,7)$

El área será:

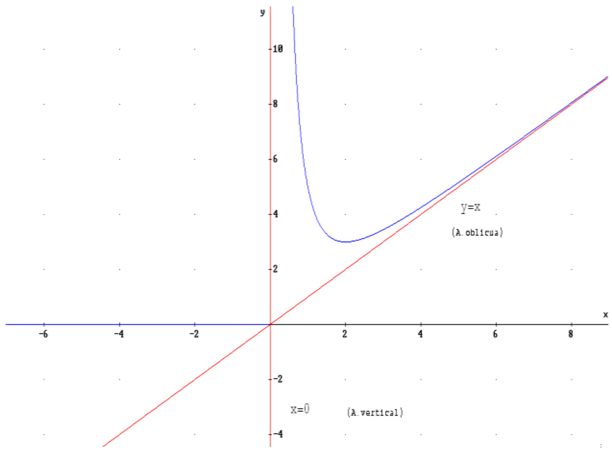
$$A = \int_0^2 (7 - (x^3 - 1))dx = \int_0^2 (8 - x^3)dx = \left[8x - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 =$$
$$= 16 - 4 = 12\,u^2$$



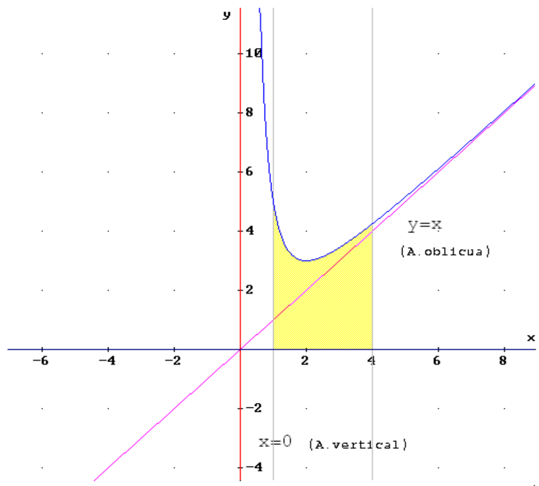
5º) Considera la función $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$ $(x > 0)$.
a) Dibuja la gráfica de la función.
b) Halla el área de la región limitada por la curva y el eje de abscisas entre las abscisas $x = 1$ **y** $x = 4$.

Resolución

a) Gráfica de la función para $x > 0$



b) Se trata de la siguiente región del plano:



Su área viene dada por la integral definida:

$$A = \int_1^4 \left(x + \frac{4}{x^2}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{4}{x}\right]_1^4 = \frac{21}{2}u^2$$

6º) Calcúlese el área de la región plana acotada limitada por las gráficas de las funciones reales de variable real siguientes:
a) $y = -x^2 - x + 6$ e $y = -2x$ [**Solución** $A = \frac{125}{6}\,u^2$]
b) $y = -x^2 - 6x - 5$ e $y = -2x^2 - 12x - 10$ [**Solución** $A = \frac{32}{3}\,u^2$]
c) $y = x^2 - x$ e $y = 1 - x^2$ [**Solución** $A = \frac{27}{24}\,u^2$]

7º) Se considera la función real de variable real $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & si\ \ x \le 1 \\ -x^2 + 4x - 3 & si\ \ x > 1 \end{cases}$

a) Estúdiese la continuidad y la derivabilidad de la función f.
b) Represéntese gráficamente la función f.
c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f**, el eje** OX**, el eje** OY **y la recta** $x = 2$.

Resolución

a) Continuidad

$\forall x \in \mathbb{R}\ x < 1,\ f(x) = x^2 - 4x + 3$: continua por ser función polinómica.
$\forall x \in \mathbb{R}\ x > 1,\ f(x) = -x^2 + 4x - 3$: continua por ser función polinómica.
Estudiamos la continuidad en $x = 1$ comprobando las condiciones:
1] $f(1) = 0$

2] $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} (x^2 - 4x + 3) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} (-x^2 + 4x - 3\,) = 0 \end{cases}$ de donde $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$

3] $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Por tanto la función f es continua en el conjunto de los números reales.

Derivabilidad

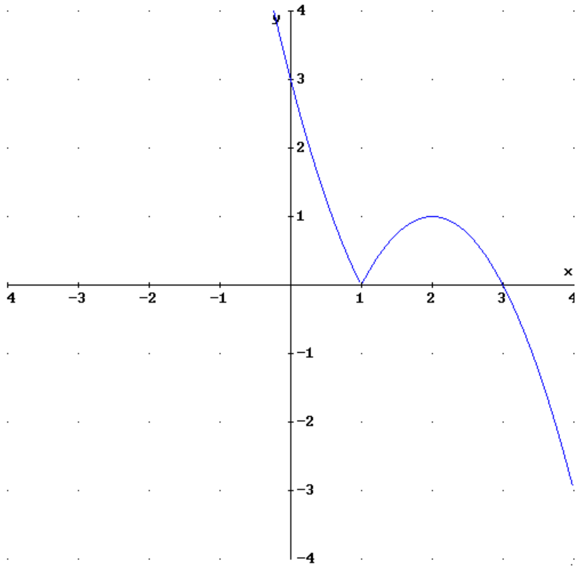
$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & si\ \ x < 1 \\ -2x + 4 & si\ \ x > 1 \end{cases}$$

$\forall x \in \mathbb{R}\ x < 1$ o $x > 1$ la función es derivable porque son exprexiones polinómicas.
Estudiamos la derivabilidad en $x = 1$, comprobando si son o no iguales las derivadas laterales:

$$f'^{-}(1) = -2 \neq f'^{+}(1) = 2$$

Por tanto f no es derivable en $x = 1$

b) Representación gráfica



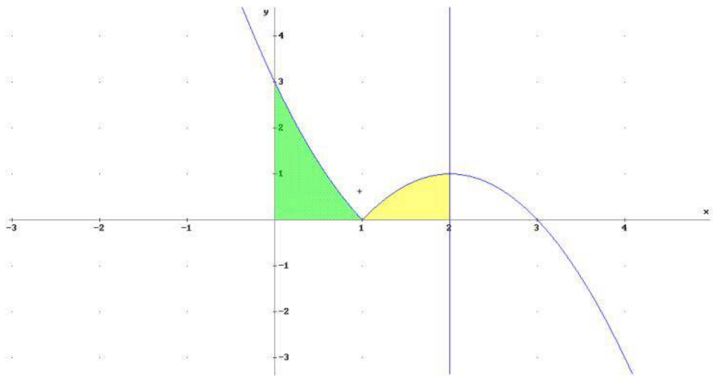
c) Se trata de calcular el área de la región coloreada de la gráfica que se muestra:

$$A_1 = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)\, dx = \frac{4}{3} u^2$$

$$A_2 = \int_1^2 (-x^2 + 4x - 3)\, dx = \frac{2}{3} u^2$$

El área del recinto plano acotado y limitado por la gráfica de f, el eje OX, el eje OY y la recta $x = 2$ es:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2u^2$$



8º) Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \frac{x(2x-1)}{x-1}$

a) Determínense las asíntotas de f. Calcúlense los extremos relativos de f.
b) Represéntese gráficamente la función f.

c) Calcúlese $\displaystyle\int_2^5 \frac{f(x)}{x^2}\,dx$

9º) Demuestra que la función $f(x)=\frac{4}{x^2+x-2}$ es estrictamente positiva en el intervalo $[2,+\infty)$ y halla el área de la región determinada por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas $x=2$ y $x=3$.

Solución

$$A=\frac{4}{3}ln\frac{8}{5}\ u^2$$

10º) Calcula el área encerrada entre la gráfica de la función exponencial $f(x)=e^x$ y la cuerda a la misma que une los puntos de abscisas $x=-1$ y $x=1$.

Solución

$$A=\frac{2}{e}\ u^2$$

11º) Se considera la función real de variable real definida por $f(x)=\frac{2x-1}{x^2-x-a}$

a) Determínense las asíntotas de f, especificando los valores del parámetro real a para los cuales f tiene una asíntota vertical, dos asíntotas verticales, o bien no tiene asíntotas verticales.

b) Para $a=-1$, calcúlense los valores reales de b para los cuales se verifica que $\int_0^b f(x)dx=0$.

Resolución

a) Asíntotas verticales (discusión)

$$x^2-x-a=0\ \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$$

Estudiamos el discriminante de la ecuación: $D=1+4a$

$D>0\ \Leftrightarrow 1+4a>0\ \Leftrightarrow \forall a\in\mathbb{R}, a>\frac{-1}{4}$ la función f tiene dos asíntotas verticales $\left[\begin{array}{l} x=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2} \\ x=\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}\end{array}\right.$

$D=0 \Leftrightarrow 1+4a=0\ \Leftrightarrow a=\frac{-1}{4}\ \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1/2}\frac{2(x-1/2)}{(x-1/2)^2}=\lim\limits_{x\to 1/2}\frac{2}{(x-1/2)}=\pm\infty \Rightarrow \mathrm{x}=\frac{1}{2}$ A. vertical si $a=\frac{-1}{4}$

$D<0 \Leftrightarrow 1+4a<0\ \Leftrightarrow \forall a\in\mathbb{R}, a<\frac{-1}{4}$ la función f tiene no tiene asíntotas verticales

Asíntotas horizontales

$\lim\limits_{x\to\pm-\infty}\frac{2x-1}{x^2-x-a}=0\quad \forall a\in\mathbb{R}$. Por tanto la recta $y=0$ es asíntota horizontal

b) Para $a=-1$, la función es $f(x)=\frac{2x-1}{x^2-x+1}$

$$\int_0^b\frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx=[L|x^2-x+1|]_0^b=L|b^2-b+1|-L1=L|b^2-b+1|$$

$$\int_0^b\frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx=0\ \Leftrightarrow L|b^2-b+1|=0\ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b^2-b+1=1\ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=1\end{array}\right. \\ b^2-b+1=-1\ \ no\ tiene\ solución\ real\end{array}\right.$$

12º) Se considera las funciones $f(x)=\frac{2}{x}$ y $g(x)=senx$, se pide:

a) Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)-\frac{2}{g(x)}\right)$.

b) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto $P\left(\frac{1}{2},4\right)$.

c) Calcula el área delimitada por la curva $y=f(x)$ y la recta $y=-x+3$.

EvAU. Madrid Junio 2017 Opción B

Solución a) 0 b) $y=-8x+8$ c) $\frac{3}{2}-2L2\ u^2$

13º) Calcular el área comprendida entre la curva $y = (x-1) \cdot e^{x}$ y la recta $y = x - 1$.

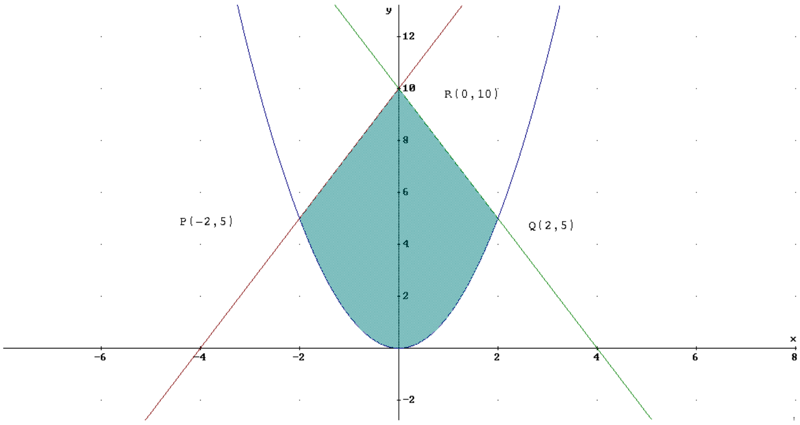
EvAU. Madrid Modelo 2017. Opción A

14º) Representar gráficamente la región acotada limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{5}{4}x^2$, $g(x) = \frac{1}{2}(5x+20)$, $h(x) = \frac{1}{2}(-5x+20)$ y obtener su área.

Resolución

Calculamos los puntos de corte de las funciones:

$$\begin{cases} y = \frac{5}{4}x^2 \\ y = \frac{1}{2}(5x+20) \end{cases} \quad P(-2,5) \ ; \quad \begin{cases} y = \frac{5}{4}x^2 \\ y = \frac{1}{2}(-5x+20) \end{cases} \quad Q(2,5) \ ; \quad \begin{cases} y = \frac{1}{2}(5x+20) \\ y = \frac{1}{2}(-5x+20) \end{cases} \quad R(0,10)$$



Por simetría de la región, tenemos que su área viene dada por:

$$A = 2 \cdot \int_0^2 \left(\frac{1}{2}(-5x+20) - \left(\frac{5}{4}x^2\right)\right) dx = 2 \cdot \int_0^2 \left(-\frac{5}{4}x^2 - \frac{5x}{2} + 10\right) dx = 10 \cdot \int_0^2 \left(-\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + 2\right) dx =$$

$$= 10 \cdot \left[-\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{4} + 2x\right]_0^2 = \frac{70}{3}\ u^2$$

15º) Se considera la función $f(x) = x \cdot e^{-x}$ y se pide:

a) Determinar el dominio y las asíntotas de f.

b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y hallar sus ectremos relativos.

c) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x)$, eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 3$. [Sol: $\frac{-4}{e^3} + \frac{2}{e}$]

EvAU. Madrid Modelo 2017. Opción B

16º) Calcular el área del triángulo limitado por el eje OX y las tangentes a la curva de ecuación $y = x^2 - 4x - 5$ en los puntos de intersección de dicha curva con el eje OX.

Resolución

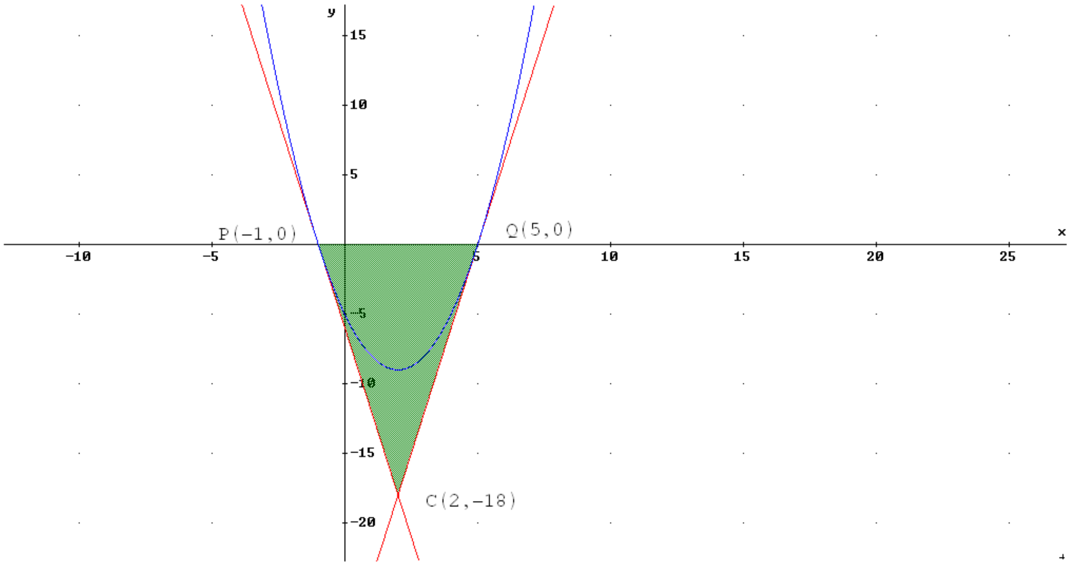
Puntos de intersección de la parábola $y = x^2 - 4x - 5$ con el eje OX:

$$y = 0 \iff x^2 - 4x - 5 = 0 \Longrightarrow \begin{bmatrix} x = -1 \\ x = 5 \end{bmatrix}$$

Las pendientes de las rectas tangentes en P y Q vienendadas por la derivada y' en $x = -1$ y $x = 5$

$$y' = 2x - 4 \quad \begin{bmatrix} y'(-1) = -6 & \textit{Recta tangente a la curva en } P(-1,0) & t_1 \equiv y = -6(x+1) \\ y'(5) = 6 & \textit{Recta tangente a la curva en } Q(5,0) & t_2 \equiv y = 6(x-5) \end{bmatrix}$$

Punto de intersección de ambas tangentes: $\begin{cases} y = -6x - 6 \\ y = 6x - 30 \end{cases}$ de donde $x = 2$; $y = -18$; $C(2,-18)$



Área del triángulo que se forma $\quad A = \frac{base\ x\ altura}{2} = \frac{6 \cdot 18}{2} = 54\ u^2$

O también: $\ A = \left| \int_{-1}^{2} (-6x - 6)dx + \int_{2}^{5} (6x - 30)dx \right| = 54\ u^2$

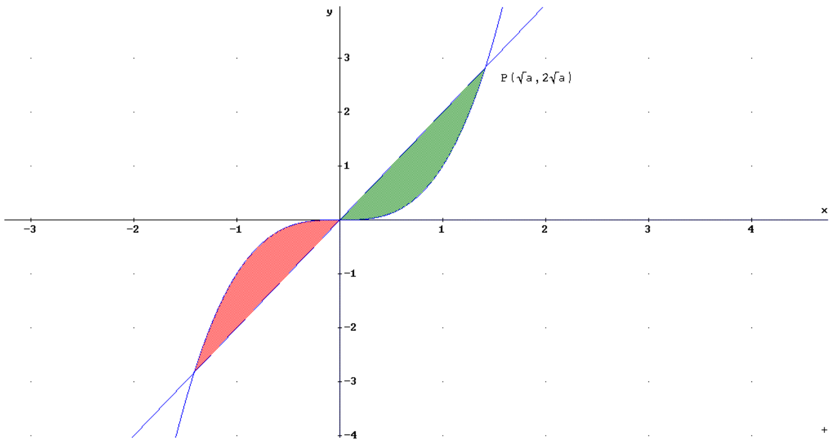
17ª) Calcular el valor de $a > 0$ para que el área de la región plana acotada limitada por las gráficas de las curvas $\quad y = x^3$, $y = ax$, sea igual a 4.

Resolución

Cortes de ambas curvas: $\begin{cases} y = x^3 \\ y = ax \end{cases} \Rightarrow x^3 = ax \Rightarrow x \cdot (x^2 - a) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{a} \end{array} \right.$

Los puntos de corte son: $\ O(0,0),\ P(\sqrt{a}, 2\sqrt{a}) y\ Q(-\sqrt{a}, 2\sqrt{a})$

Por la simetría impar de las curvas basta que $\ \int_0^{\sqrt{a}} (ax - x^3)dx = 2$



$$\int_0^{\sqrt{a}} (ax - x^3)dx = 2 \iff \left[a\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^{\sqrt{a}} = 2 \iff a^2 = 8 \iff a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

El valor que buscamos es $\ a = 2\sqrt{2}$

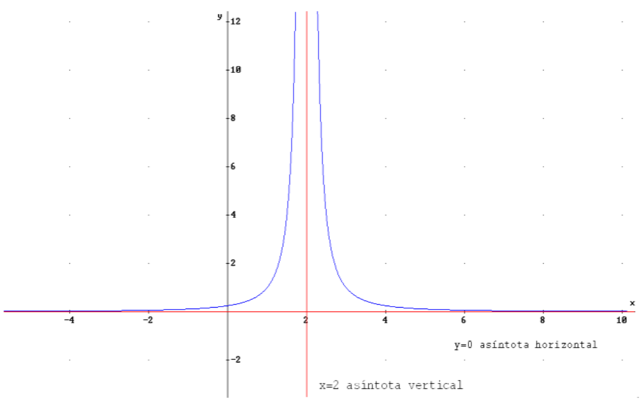
18ª)

a) Estudia y representa la función $\ f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$

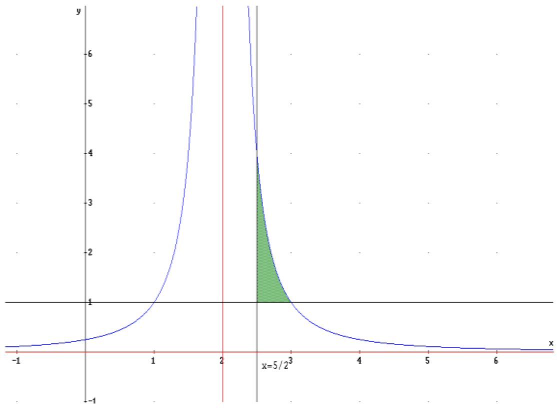
b) Halla el área de la región comprendidad entre la gráfica de la función anterior y las rectas $y = 1$, $x = 5/2$.

Resolución

a)



b)



b) El área que nos piden aparece coloreada en la figura de la derecha y viene dada por:

$$A = \int_{5/2}^{3} \left(\frac{1}{(x-2)^2} - 1 \right) dx = \left[-\frac{1}{x-2} - x \right]_{5/2}^{3} = \frac{1}{2}\, u^2$$

19º) Se considera la función real de variable real $f(x) = \begin{cases} \frac{-4}{x+2} - 1 & si\ \ x \le 0 \\ \frac{1}{x+1} & si\ \ x > 0 \end{cases}$

a) Determínense las asíntotas de la función y los puntos de corte con los ejes.

b) Calcúlese $\int_{-1}^{1} f(x)dx$

Resolución

Asíntotas

$\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$, por tanto, la recta $x = -2$ es asíntota vertical.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, por tanto, las rectas $y = -1$ e $y = 0$ son asíntotas verticales.

Cortes con los ejes

Eje OX: $y = 0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{-4}{x+2} - 1 = 0 \ \Longrightarrow x = -6 \\ \frac{1}{x+1} = 0 \ \ no\ tiene\ solución \end{array} \right.$ Corte con el eje OX en el punto $A(-6,0)$

Eje OY: $x = 0 \ \Longrightarrow y = -3$ Corte con el eje OY en el punto $B(0,-3)$

b) $\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} \left(\frac{-4}{x+2} - 1 \right) dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x+1}\, dx = -3L2 - 1$

20º) Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = 3e^{-2x}$.

a) Obténgase la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f **en el punto** $x = 0$.

b) Calcúlese el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de f**, las rectas** $x = 0, x = 0{,}5$ **y el eje de abscisas.**

Solución

a) $y = -6x + 3$

b) $A = \int_{0}^{0{,}5} 3e^{-2x}\, dx = \frac{3 \cdot (e-1)}{2e}\, u^2$

21º) Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x} & si\ x \le -1 \\ \frac{x^2 - b}{4} & si\ x > -1 \end{cases}$

a) Calcúlense a **y** b **para que** f **sea continua y derivable en** $x = -1$.

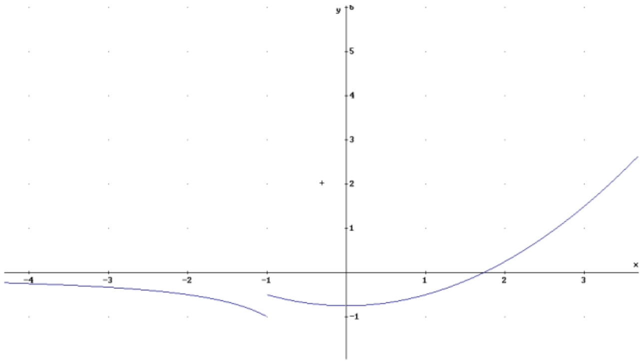
b) Para $a = 1, b = 3$**, represéntese gráficamente la función** f.

c) Calcúlese el valor de b **para que** $\int_{0}^{3} f(x)dx = 6$

Solución

a) $a=\frac{1}{2}$; $b=3$ b) $a=1$; $b=3$

c) $\int_0^3 \frac{x^2-b}{4}\,dx = 1 \Leftrightarrow b=\frac{5}{3}$



22º) Se considera la función real de variable real definida por : $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$

a) Determínense sus asíntotas.

b) Calcúlense sus máximos y mínimos locales. Esbócese la gráfica de f.

c) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por las rectas verticales $x=2$, $x=3$, **la gráfica de la función** f **y la recta de ecuación** $y=x+1$.

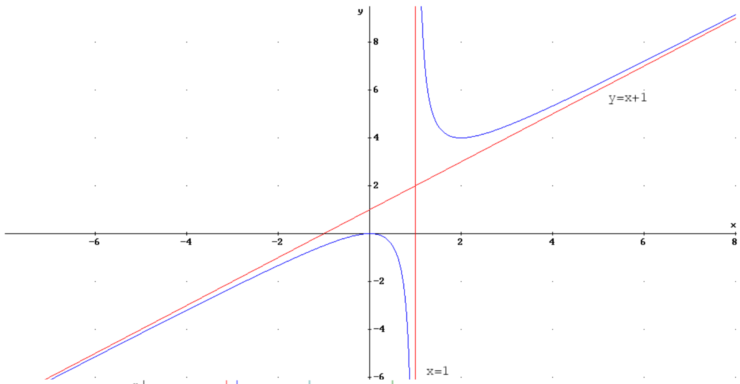
Solución

a) Asíntota vertical: $x=1$

Asíntota oblicua: $y=x+1$

b) Máximo relativo en el punto $P(0,0)$

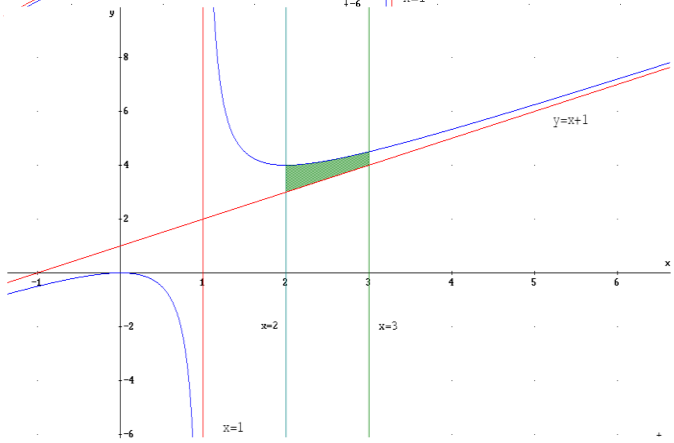
Mínimo relativo en el punto $Q(2,4)$



c) El área del recinto, en verde en la figura, viene dado por:

$$A=\int_2^3\left(\frac{x^2}{x-1}-(x+1)\right)dx=$$

$$=\int_2^3 \frac{1}{x-1}\,dx=[L|x-1|]_2^3=L2\,u^2$$



23º) Se considera la función real de variable real definida por $f(x)=2\cdot e^{x+1}$

a) Esbócese la gráfica de la función f **.**

b) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas $x=0$ **y** $x=1$. [Sol: $2e\cdot(e-1)$]

24º) Considera la función $f(x)=x^2+|x|$. **Calcula** $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$.

[Sol: $\frac{11}{2}$]

25º) Dada la función $f(x)=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$ **, se pide:**

a) Determinar, si existen, las asíntotas horizontales de $f(x)$.

b) Calcular $f'(4)$.

c) Halla el área del recinto limitado por la curva $y=f(x)$, **el eje** OX **y las rectas** $x=-1$ **y** $x=1$.

EvAU. Madrid Junio 2018. Opción B