1º] Se considera el sistema $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x+2y-az=1} \\ \boldsymbol{-y+z=0} \\ \boldsymbol{ax+z=a} \end{array}\right.$

a) Discútase según los valores del parámetro real $\boldsymbol{a}$.
b) Resuélvase el sistema en el caso $\boldsymbol{a=1}$.

Resolución

a) Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -a \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz ampliada con la columna de términos independientes: $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -a & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$

$$det(A)=|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -a \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix}=-(a-1)^2$$

$|A|=0 \iff a=1$

Caso 1 $\forall a\in\mathbb{R}\ \ a\neq 1$. $|A|\neq 0$. Por tanto $rg(A)=3=rg(A^*)=nº\ incógnitas$

$$Sistema\ Compatible\ Determinado\ (Solución\ única)$$

Caso 2 $a=1$. En este caso $|A|=0\ \ y\ \ rg(A)<3$.

Matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculemos el rango de la matriz A:

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A)=2$, $rg(A^*)\geq 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$. Por tanto $rg(A^*)=2$.

$$rg(A)=rg(A^*)=2<nº\ incógnitas:\ Sistema\ compatible\ Indeterminado$$

b) Observando el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, el sistema equivalente viene dado por las ecuaciones cuyos coeficientes forman parte de dicho menor, esto es $\left\{\begin{array}{l} x+2y-z=1 \\ -y+z=0 \end{array}\right.$

Las incógnitas principales del sistema son aquellas cuyos coeficientes forman parte de las columnas del menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, es decir x e y. La incógnita z actúa como incógnita no principal o parámetro. Así tenemos:

$z=t;\ \ \left\{\begin{array}{l} x+2y=1+t \\ -y\ \ =-t \end{array}\right.\ \ \forall t\in\mathbb{R}$, de donde $y=t\ ;\ x=1-t$

La solución viene dada por $\left\{\begin{array}{l} x=1-t \\ y=t \\ z=t \end{array}\right.\qquad \forall t\in\mathbb{R}$

2º] Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -a \\ 0 & 1 & -1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$ dependiente del parámetro real a.

a) Determina los valores de a para que la matriz A tenga inversa. (0,5 puntos)

b) Para $a = -1$, resuelve la ecuación $X \cdot A = I + 2 \cdot A$ siendo I la matriz unidad de orden 3.

Resolución

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & -a \\ 0 & 1 & -1 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 4a + a^2 \;\; ; \;\; 4 + 4a + a^2 = 0 \Leftrightarrow a = -2$$

a) $A \; tiene \; inversa \;\; \Leftrightarrow a \neq -2$

b) $a = -1$; $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $|A| = 1$; $X \cdot A = I + 2A \Longrightarrow X = (I + 2A) \cdot A^{-1}$. Calculamos la matriz inversa de A.

$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$; $A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$; $A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8$; $A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5$; $A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 4$

$A_{31} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3$; $A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2$; $A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$

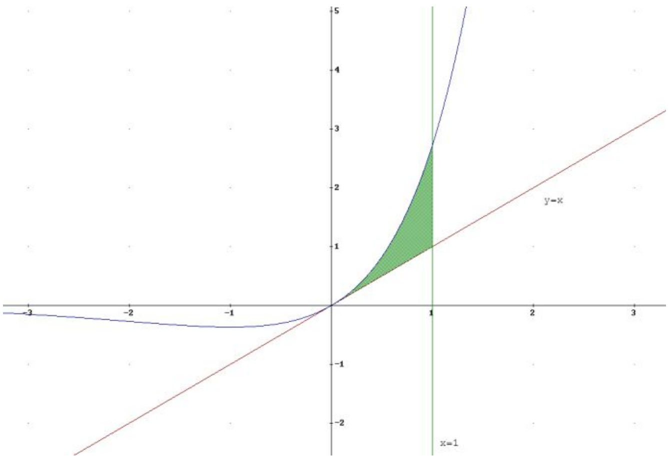
Matriz adjunta de A: $Adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 8 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; Matriz inversa: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Por tanto, $X = (I + 2A) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 \\ 1 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

3º] Considera la función $f(x) = x \cdot e^x$. Determina el área de la región plana limitada por la gráfica de esa función, su recta tangente en el origen y la recta $x = 1$.

Resolución

$f'(x) = e^x + x \cdot e^x = e^x \cdot (x + 1)$; $f'(0) = 1; f(0) = 0$



La ecuación de la recta tangente a la curva en el origen $O(0,0)$ es: $t \equiv y = x$

El área buscada es:

$$A = \int_0^1 (xe^x - x)dx = \int_0^1 x \cdot e^x dx - \int_0^1 x \; dx \overset{[1]}{=}$$

$$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = e^x \cdot (x - 1) + c$$

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = e^x dx \Rightarrow v = \int dv = \int e^x = e^x$

$$A \overset{[1]}{=} \left[e^x \cdot (x - 1) - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \; u^2$$

4º) Un pequeño islote dista 1 Km de una costa rectilínea. Queremos instalar en dicho islote una señal luminosa que se ha de alimentar con un tendido eléctrico. La fuente de energía está situada en la costa en un punto distante 1 Km del punto de la costa más próximo al islote. El coste del tendido eléctrico por la costa es de 1200 €/Km y bajo el mar los 5/3 del tendido en tierra. ¿A qué distancia de la fuente de energía debe empezar el tendido bajo el mar para conseguir un coste mínimo?

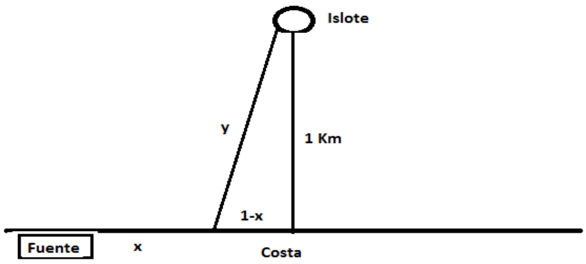
Resolución

Sea x la distancia en la costa, en Km, de la fuente de energía desde la que empieza el tendido bajo el mar.

Sea y la distancia, en Km, del tendido eléctrico bajo el mar.

Función objetivo : $C(x, y) = 1200x + 2000y$ minimizar

$s.a \; (1 - x)^2 + 1 = y^2$



Despejando de la restricción:

$$(1-x)^2 = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{1+(1-x)^2}$$

Sustituyendo en la función objetivo:

$$C(x) = 1200x + 2000 \cdot \sqrt{1+(1-x)^2}$$

Buscamos el mínimo de la función coste:

$$C'(x) = 1200 + 2000 \cdot \frac{-2\cdot(1-x)}{2\cdot\sqrt{1+(1-x)^2}} = 1200 - \frac{2000\cdot(1-x)}{\sqrt{1+(1-x)^2}} \;;\; C'(x) = 0 \Rightarrow 1200 = \frac{2000\cdot(1-x)}{\sqrt{1+(1-x)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12 \cdot \sqrt{1+(1-x)^2} = 20 \cdot (1-x) \Rightarrow 3 \cdot \sqrt{1+(1-x)^2} = 5 \cdot (1-x)$$

elevando al cuadrado ambos miembros:

$$9 \cdot (1+(1-x)^2) = 25 \cdot (1-x)^2 \Rightarrow 9 + 9 - 18x + 9x^2 = 25 - 50x + 25x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16x^2 - 32x + 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{32 \pm \sqrt{1024-448}}{32} = \frac{32 \pm \sqrt{576}}{32} = \frac{32 \pm 24}{32} = \begin{cases} \frac{7}{4} > 1. \, No\ válida \\ \frac{1}{4} \end{cases}$$

Se comprueba fácilmente que $x = \frac{1}{4}$ es mínimo de la función coste C.

Así la distancia de la fuente de en ergía a la que debe empezar el tendido bajo el mar para conseguir un coste mínimo es de un cuarto de kilómetro.

5º)

a) Probar que la ecuación $x^{2009} - e^x + 2 = 0$ tiene alguna solución real.

b) Calcula $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right)$

c) Halla una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = \frac{x^4+x+1}{x^2+x}$ tal que $F(1) = \frac{5}{12}$.

Resolución

a) Consideramos la función $f(x) = x^{2009} - e^x + 2$ continua en $\mathbb{R}$ por ser suma y resta de continuas.

$$\left.\begin{array}{r} f(x) \text{ es continua en } [-1,0] \\ f(-1) = 1 - e < 0 \\ f(0) = 1 > 0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \exists c \in (-1,0) \text{ tal que } f(c) = 0, \text{ es decir, } c^{2009} - e^c + 2 = 0, \text{ con lo que}$$

$c \in (-1,0)$ es una raíz de la ecuación $x^{2009} - e^x + 2 = 0$

b)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to 0}\frac{x - \ln(1+x)}{x\cdot\ln(1+x)} \overset{\frac{0}{0}\,L`Hôp}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1 - \frac{1}{1+x}}{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}} = \overset{\frac{0}{0}\,L`Hôp}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}} = \frac{1}{2}$$

c) $F(x) = \int \frac{x^4+x+1}{x^2+x}\,dx = \int (x^2 - x + 1)\,dx + \int \frac{1}{x^2+x}\,dx \overset{[1]}{=} \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \ln|x| - \ln(x+1) + c$

$\int \frac{1}{x^2+x}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx = ln|x| - ln|x+1| + k$ [1]

$$F(1) = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - ln2 + c = \frac{5}{12} \Leftrightarrow c = -\frac{5}{12} + ln2$$

La primitiva que nos piden es $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \ln(x+1) - \frac{5}{12} + ln2$

6º] El 30% de los individuos de una cierta población son jóvenes. Si una persona es joven, la probabilidad de que lea prensa al menos una vez por semana es 0,2. Si una persona lee prensa al menos una vez por semana, la probabilidad de que no sea joven es 0,9. Se elige una persona al azar de dicha población. Calcúlese la probabilidad de que esa persona:

a) No lea prensa al menos una vez por semana.

b) No lea prensa al menos una vez por semana o no sea joven.

Resolución

Consideramos los siguientes sucesos:

$J =$ "*Una persona de esa población es joven*" ;
$P =$ "*Una persona de esa población lee prensa al menos una vez por semana*"
Del enunciado tenemos que:

$$p(J) = 0{,}3 \quad ; \quad p(P|J) = 0{,}2 \quad ; \quad p(\bar{J}|P) = 0.9$$

a) De $p(\bar{J}|P) = 0.9$ obtenemos que $p(J|P) = 1 - p(\bar{J}|P) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1 \quad [1]$
Por otro lado,

$$p(J|P) = 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{p(J \cap P)}{p(P)} = 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{p(J) \cdot p(P|J))}{p(P)} = 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{0{,}3 \cdot 0{,}2}{p(P)} = 0{,}1 \Leftrightarrow p(P) = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}2}{0{,}1} = 0{,}6 \quad [2]$$

La probabilidad de que esa persona no lea prensa al menos una vez por semana es

$$p(\bar{P}) = 1 - p(P) \overset{[2]}{=} 1 - 0{,}6 = 0{,}4$$

b) $p(\bar{P} \cup \bar{J}) = p(\overline{P \cap J}) = 1 - p(P \cap J) = 1 - p(P) \cdot p(J|P) \overset{[1,2]}{=} 1 - 0{,}6 \cdot 0{,}1 = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$

La probabilidad de que esa persona no lea prensa al menos una vez por semana o no sea joven es 0,94

7.- El peso de las ovejas adultas se distribuye normalmente con una media de 53 Kg y una desviación típica de 2,4 Kg.
a) ¿Qué porcentaje de las ovejas pesará entre 50 y 57 Kg?
b) Si pretendemos separar una cuarta parte de las ovejas, siendo las más pesadas del rebaño, ¿a partir de qué peso se hará la separación?
c) Para un rebaño de 4000 ovejas, las 800 que menos pesan ¿por debajo de qué peso están?

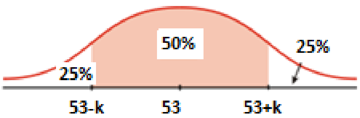
Resolución

Sea $X =$ "*Peso de las ovejas adultas*" ; $X \hookrightarrow N(53;\ 2{,}4)$; $Z \hookrightarrow N(0,1)$

a) $p(50 \leq X \leq 57) = p\left(\frac{50-53}{2{,}4} \leq Z \leq \frac{57-53}{2{,}4}\right) = p(-1{,}25 \leq Z \leq 1{,}67) = p(Z \leq 1{,}67) - p(Z > 1{,}25) =$
$= p(Z \leq 1{,}67) - [1 - p(Z \leq 1{,}25)] = 0{,}9525 - 1 + 0{,}8944 = 0{,}8469$

El porcentaje de ovejas entre 50 y 57 Kg será del 84,69%

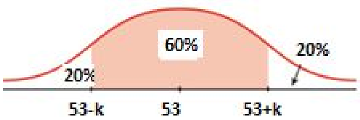
b) La cuarta parte de las ovejas es un 25%. Buscamos un valor $53 + k$ tal que $p(X > 53 + k) = 0{,}25$.



$p(X > 53 + k) = 0{,}25 \Leftrightarrow p(X < 53 + k) = 0{,}75 \Leftrightarrow p\left(Z < \frac{k}{2{,}4}\right) = 0{,}75 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{k}{2{,}4} = 0{,}675 \Leftrightarrow k = 1{,}62$

El valor que separa la cuarta parte de las ovejas más pesadas es $53 + 1{,}62 = 54{,}62\ Kg$

c) Sobre 4000 ovejas, 800 representan el 20%.



Buscamos un valor $53 - k$ tal que $p(X < 53 - k) = 0{,}20$.
$p(X < 53 - k) = 0{,}20 \Leftrightarrow p(X > 53 + k) = 0{,}20 \Leftrightarrow p(X \leq 53 + k) = 0{,}80 \Leftrightarrow$
$p\left(Z \leq \frac{k}{2{,}4}\right) = 0{,}80 \Leftrightarrow \frac{k}{2{,}4} = 0{,}845 \Leftrightarrow k = 2{,}028$

Las 800 ovejas que menos pesan están por debajo de $53 - 2{,}028 = 50{,}972\ Kg$

8.- Dados el punto $P(1, -1, 2)$, y el plano $\pi \equiv 2x - y + z - 11 = 0$, se pide:
a) Determinar el punto Q de intersección del plano π con la recta r perpendicular a π que pasa por P.
b) Hallar el punto R simétrico del punto P respecto del plano π.
c) Obtener la ecuación del plano paralelo al plano π que contiene al punto H que se encuentra a $5\sqrt{6}$ unidades del punto P en el sentido del vector $\overrightarrow{PQ}$.

Resolución

a) El vector normal del plano $\vec{n} = (2, -1, 1)$ es el de dirección de la recta r que buscamos:

$$r \equiv \begin{cases} x = \ \ 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = \ \ 2 + t \end{cases}$$

Intersección de la recta r y el plano π:

$$2 \cdot (1+2t) + 1 + t + 2 + t - 11 = 0 \Longrightarrow 6t = 6 \Longrightarrow t = 1$$

El punto es $Q(3,-2,3)$

b) <u>Simétrico del punto P respecto del plano</u> π

El punto Q es medio entre P y su simétrico $R(x,y,z)$ y, por tanto:

$$\frac{x+1}{2} = 3 \Longrightarrow x = 5 \ \ ; \ \ \frac{y-1}{2} = -2 \Longrightarrow y = -3 \ \ ; \ \ \frac{z+2}{2} = 3 \Longrightarrow z = 4$$

El simétrico es $R(5,-3,4)$

c) El plano π' es paralelo al plano π y, por tanto, su ecuación será de la forma $\pi' \equiv 2x - y + z + D = 0$

El punto H dista $5\sqrt{6}$ unidades del punto P y en el sentido del vector $\overrightarrow{PQ}$, por tanto $\overrightarrow{PH} = k \cdot \overrightarrow{PQ}$ con $k > 0$ y $d(P,H) = 5\sqrt{6}$.

$$\overrightarrow{PQ} = (2,-1,1) \ ; \ \ \overrightarrow{PH} = (2k,-k,k) \ con\ k > 0$$

$$d(P,H) = \left|\overrightarrow{PH}\right| = \sqrt{(2k)^2 + k^2 + k^2} = 5\sqrt{6} \Leftrightarrow 6k^2 = 150 \Leftrightarrow k^2 = 25 \Leftrightarrow k = \pm 5$$

Para $k = 5$, $\overrightarrow{PH} = (10,-5,5)$ y el punto $H = (10,-5,5) + P = (11,-6,7)$

$$H \in \pi' \Leftrightarrow 22 + 6 + 7 + D = 0 \Leftrightarrow D = -35$$

El plano buscado es $\pi' \equiv 2x - y + z - 35 = 0$