1º) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x-y+z+1=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$ **y es perpendicular al plano** $\pi \equiv 2x-y+3z+1=0$

Resolución

1ª Forma

El plano que buscamos será uno de haz de planos que contiene a la recta:

$$x-y+z+1+\lambda\cdot(x+2y+z)=0 \Longleftrightarrow (1+\lambda)x+(2\lambda-1)y+(1+\lambda)z+1=0$$

Obligamos a que el plano del haz sea perpendicular al plano $\pi \equiv 2x-y+3z+1=0$, para ello, el producto escalar de sus vectores normales tiene que ser cero:

$$2\cdot(1+\lambda)-(2\lambda-1)+3\cdot(1+\lambda)=0 \Longleftrightarrow 3\lambda+6=0 \Longleftrightarrow \lambda=-2$$

El plano que nos piden es $x-y+z+1-2\cdot(x+2y+z)=0$ y, simplificando, obtenemos la ecuación: $\pi' \equiv x+5y+z-1=0$

2ª Forma

También, podemos obtener la dirección de la recta, un punto de ella y el normal del plano:

Vector director de la recta r: $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}=(-3,0,3)$ Tomo $\vec{u}=(1,0,-1)$

Punto de r: $z=0 \Longrightarrow \begin{cases} x-y=-1 \\ x+2y=0 \end{cases}$ de donde $x=-\frac{2}{3}$; $y=\frac{1}{3}$. $P\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},0\right)$

Vector normal del plano: $\vec{n}=(2,-1,3)$

Así $\pi' \equiv \begin{vmatrix} x+\frac{2}{3} & y-\frac{1}{3} & z \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \pi' \equiv -\left(x+\frac{2}{3}\right)-5\left(y-\frac{1}{3}\right)-z=0 \Longleftrightarrow$

$$\pi' \equiv x+5y+z-1=0$$

2º) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x=1+2t \\ y=\quad 3t \\ z=-1+t \end{cases}$ **y** $s \equiv x=y=z$ **se pide hallar:**

a) Su posición relativa

b) La ecuación de la recta perpendicular común a r **y** s**.**

c) La distancia entre r **y** s**.**

Resolución

a) Un punto y vector director de $r(A,\vec{u})$ son $A(1,0,-1)$ y $\vec{u}=(2,3,1)$

Un punto y vector director de $s(B,\vec{v})$ son $B(0,0,0)$ y $\vec{v}=(1,1,1)$

Las rectas se cruzan porque $rg\left(\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right)=3$ al ser $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

b) Un punto genérico de la recta r es $P(1+2t,3t,-1+t)$

Un punto genérico de la recta s es $Q(s,s,s)$

El vector $\overrightarrow{PQ}=(s-2t-1,s-3t,s-t+1)$ debe ser ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$$\begin{cases} \vec{u}\perp\overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\overrightarrow{PQ}=0 \Leftrightarrow 2(s-2t-1)+3(s-3t)+s-t+1=0 \\ \vec{v}\perp\overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \vec{v}\cdot\overrightarrow{PQ}=0 \Leftrightarrow s-2t-1+s-3t+s-t+1=0 \end{cases}$$

Obtenemos así el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 6s-14t=1 \\ 3s-6t=0 \end{cases}$ cuya solución es $t=-1/2$, $s=-1$

Puntos P y Q que determinan la perpendicular común: $P\left(0,-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$ y $Q(-1,-1,-1)$

La recta perpendicular común a las rectas r y s pasa por el punto $Q(-1,-1,-1)$ y tiene la dirección del vector $\overrightarrow{PQ}=\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$; tomando $\vec{w}=2\overrightarrow{PQ}=(-2,1,1)$, su ecuación es:

$$\frac{x+1}{-2}=y+1=z+1$$

c) La distancia entre las rectas r y s será la distancia entre los puntos P y Q del apartado anterior:

$$d(r,s)=d(P,Q)=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{(-1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}u$$

También, aplicando la fórmula de distancia entre dos rectas:

$$\overrightarrow{AB}=(-1,0,1)\,;\,\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\2&3&1\\1&1&1\end{vmatrix}=2\vec{\imath}-\vec{\jmath}-\vec{k}=(2,-1,-1)$$

$$d(r,s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right]\right|}{|\vec{u}\wedge\vec{v}|}=\frac{\left\|\begin{matrix}-1&0&1\\2&3&1\\1&1&1\end{matrix}\right\|}{\sqrt{2^2+1+1}}=\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{2}u$$

3º) Dados los planos $\pi_1\equiv x-3y+z=0$ y $\pi_2\equiv 2x-3y+z=5$ se pide:
a) El ángulo que forman.
b) Ecuación del plano π perpendicular a los dos planos que pasa por el punto $P(2,-1,5)$.
c) Distancia del punto $Q(0,0,1)$ al plano π_2.

Resolución

Vectores normales: $\overrightarrow{n_1}=(1,-3,1)$ y $\overrightarrow{n_2}=(2,-3,1)$

$$cos(\widehat{\pi_1,\pi_2})=cos(\widehat{n_1,n_2})=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{|2+9+1|}{\sqrt{1+9+1}\cdot\sqrt{4+9+1}}=\frac{12}{\sqrt{154}}\Longrightarrow(\widehat{\pi_1,\pi_2})=14{,}763°$$

b)

1ª Forma

Los vectores normales de los dos planos serán de dirección del plano que buscamos

Así, $\pi\equiv\begin{vmatrix}x-2&y+1&z-5\\1&-3&1\\2&-3&1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\pi\equiv y+1+3(z-5)=0\Leftrightarrow\pi\equiv y+3z-14=0$

2ª Forma

Como $\frac{1}{2}\neq\frac{-3}{-3}$, los planos se cortan en una recta r (recta como intersección de planos).

Como la recta r está contenida en los dos planos π_1 y π_2, el vector normal del plano π será el de dirección de r. Vector director de la recta r: $\begin{vmatrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\1&-3&1\\2&-3&1\end{vmatrix}=\vec{\jmath}+3\vec{k}=(0,1,3)$

Así, $\pi\equiv y+3z+D=0$.

Como $P(2,-1,5)\in\pi$, se tiene que $-1+3\cdot5+D=0$, de donde $D=-14$

El plano buscado es $\pi\equiv y+3z-14=0$.

c) $d(Q,\pi_2)=\frac{|1-5|}{\sqrt{4+9+1}}=\frac{4}{\sqrt{14}}=\frac{2\sqrt{14}}{7}\ u$

4º) Encuentra un punto P de la recta $r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{3} = 3 - z$ tal que el triángulo de vértices los puntos $Q(1,0,-1), R(-1,2,3)$ y P es isósceles en P.

Resolución

Punto genérico de la recta r: $P(-3+2t, -4+3t, 3-t)$

Imponiendo la condición pedida $d(Q,P) = d(R,P)$:

$(-3+2t-1)^2 + (-4+3t)^2 + (3-t+1)^2 = (-3+2t+1)^2 + (-4+3t-2)^2 + (3-t-3)^2$

esto es:

$$(2t-4)^2 + (3t-4)^2 + (4-t)^2 = (2t-2)^2 + (3t-6)^2 + t^2$$

$$4t^2 - 16t + 16 + 9t^2 - 24t + 16 + 16 - 8t + t^2 = 4t^2 - 8t + 4 + 9t^2 - 36t + 36 + t^2$$

$$-48t + 48 = -44t + 40 \Leftrightarrow 4t = 8 \Leftrightarrow t = 2$$

El punto que buscamos es $P(1,2,1)$

5º) Dada la recta $r \equiv \begin{cases} 3x - y \quad + 3 = 0 \\ x \quad - z + 2 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x - y = 4$

a) Determina su posición relativa.

b) Halla el ángulo que forman .

c) Determina la ecuación de la recta r' simétrica de r respecto de π.

d) Calcula el volumen del tetraedro determinado por los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados OX y OY, el origen de coordenadas y el punto de intersección de r y π.

Resolución

a)

1ª Forma

Consideramos el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x - y \quad = -3 \\ x \quad - z = -2 \\ x - y \quad = 4 \end{cases}$

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ se tiene que $rg(A) = 3 = rg(A^*) = nº\ incógnitas$. Solución única .

La recta y el plano se cortan en un punto

2ª Forma

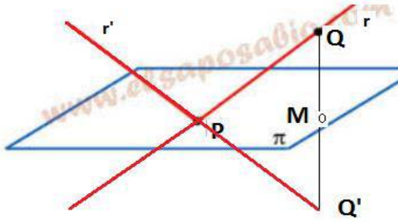
Vector director de la recta, $\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} = (1,3,-1)$. Vector normal del plano, $\vec{n} = (1,-1,0)$. Como $\vec{n} \cdot \vec{u} = -2 \neq 0$, la recta y el plano se cortan en un punto.

b) Sea $\vec{n} = (1,-1,0)$ vector normal del plano y $\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} = (1,3,1)$ vector de dirección de la recta.

$$sen(\widehat{r,\pi}) = \cos(\widehat{\vec{n},\vec{u}}) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{|1-3|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{11}} = \frac{\sqrt{22}}{11} \cong 0{,}4264 \Longrightarrow (\widehat{r,\pi}) = 25{,}24°$$

c) Punto P de intersección de la recta y el plano: $\begin{cases} 3x - y & = -3 \\ x \quad - z & = -2 \\ x - y & = 4 \end{cases}$

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-2} = -\dfrac{7}{2}$; $\quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{-2} = -\dfrac{15}{2}$; $\quad z = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{-2} = -\dfrac{3}{2}$; $\quad P\left(\dfrac{-7}{2}, \dfrac{-15}{2}, \dfrac{-3}{2}\right)$



Tomo un punto Q de la recta r: $x = 0 \Longrightarrow y = 3$; $z = 2$; $Q(0,3,2)$ y busco su simétrico Q' respecto del plano. Para ello, hallo la recta s perpendicular al plano π que pasa por el punto Q que tendrá la dirección del vector normal del plano π, esto es $\vec{n} = (1,-1,0)$:

$$s \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = 2 \end{cases}$$

Intersección de la recta s y el plano π: $\begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = 2 \\ x - y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow t - (3 - t) = 4 \Leftrightarrow 2t = 7 \Leftrightarrow t = \frac{7}{2}$

El punto de intersección es $M\left(\frac{7}{2}, \frac{-1}{2}, 2\right)$ y es medio entre $Q(0,3,2)$ y su simétrico $Q'(x,y,z)$.
Por tanto, $\frac{x}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow x = 7$; $\frac{y+3}{2} = \frac{-1}{2} \Rightarrow y = -4$; $\frac{z+2}{2} = 2 \Rightarrow z = 2$ y $Q'\left(\frac{7}{2}, \frac{-1}{2}, 2\right)$.
La recta r', simétrica de la recta r respecto del plano π, pasa por los puntos P y Q'.
Tomamos como vector director $\overrightarrow{PQ'} = \left(\frac{21}{2}, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$, o mejor aún $\frac{2}{7}\overrightarrow{PQ'} = (3,1,1)$
La recta simétrica es:

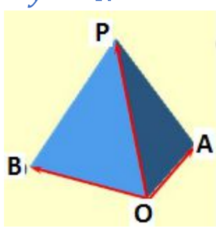
$$r' \equiv \frac{x + \frac{7}{2}}{3} = y + \frac{15}{2} = z + 3/2$$

d) Los ejes coordenados son: Eje OX: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$; Eje OY: $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Puntos A y B de intersección de los ejes OX y OY con el plano $\pi \equiv x - y = 4$:

$\begin{cases} x - y = 4 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Longrightarrow A(4,0,0)$; $\begin{cases} x - y = 4 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Longrightarrow B(0,-4,0)$; $O(0,0,0)$

Punto $P\left(\frac{-7}{2}, \frac{-15}{2}, \frac{-3}{2}\right)$ intersección de la recta r y el plano π.



Tetraedro determinado por los puntos $O(0,0,0), A(4,0,0), B(0,-4,0)$ y $P\left(\frac{-7}{2}, \frac{-15}{2}, \frac{-3}{2}\right)$.

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OP}\right]\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ -\frac{7}{2} & -\frac{15}{2} & -\frac{3}{2} \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{3}{2} = 4\, u^3$$

Puntuación

1 ---------- 0,5 puntos
2, 3 ------- 1,5 “
4 ---------- 2 “
5a, 5b --- 0,75 “
5c, 5d --- 1,5