Cálculo diferencial

1º) Demuestra que la ecuación $x \cdot e^x = 2$ tiene exactamente una raíz real positiva y encuéntrala con una cifra decimal exacta.

Resolución

Sea $f(x) = x \cdot e^x - 2$ continua en $\mathbb{R}$ por ser resta y producto de continuas.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ continua\ en\ [0,1] \\ f(0) = -2 < 0 \\ f(1) = e - 2 > 0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \exists c_1 \in (0,1)\ con\ f(c_1) = 0 \Leftrightarrow c_1 \cdot c^{c_1} - 2 = 0 \Leftrightarrow c_1 \cdot c^{c_1} = 2$$

Por tanto, la ecuación $x \cdot e^x = 2$ tiene, al menos, una raíz $c_1 \in (0,1)$ y, por tanto, positiva.
Supongamos que c_2 fuese otra raíz positiva de la ecuación, esto es $f(c_2) = 0$ y $c_2 > c_1$.
Aplicando el teorema de Rolle a la función $f(x)$ en el intervalo (c_1, c_2) se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ continua\ en\ [c_1, c_2] \\ f(x)\ derivable\ en\ (c_1, c_2) \\ f(c_1) = f(c_2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists x_1 \in (c_1, c_2)\ tal\ que\ f'(x_1) = 0$$

es decir, encontramos un punto x_1 positivo de derivada nula.
Sin embargo, $f'(x) = e^x \cdot (x+1)$ y $e^x \cdot (x+1) = 0 \Longrightarrow x = -1$; esto contradice la existencia de un valor positivo $x_1 \in (c_1, c_2)$ con $f'(x_1) = 0$. La contradicción viene de suponer la existencia de una segunda raíz c_2. Por tanto, la ecuación tiene exactamente una raíz real positiva c_1.
Por otro lado,

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ es\ continua\ en\ [0'8, 0'9] \\ f(0'8) \cong -0{,}22 < 0 \\ f(0'9) = 0{,}21 > 0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \exists c \in (0'8, 0'9)\ tal\ que\ f(c) = 0$$

Así la raíz, con una cifra decimal exacta es $c = 0{,}8$ ....

2º) Halla los valores de a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + bx + 1 & si\ \ x \le 2 \\ -2x + a & si\ x > 2 \end{cases}$ **cumpla las hipótesis del teorema del valor medio de Lagrange en el intervalo** $[0, 4]$**, calcula después el valor o valores de x para los que se cumple la tesis en el intervalo.**

Resolución

a) $\forall x \in \mathbb{R}\ x < 2,\ \ f(x) = -x^2 + bx + 1$ continua por ser polinómica .
$\forall x \in \mathbb{R}\ x > 2,\ f(x) = -2x + a$ continua por ser polinómica.
Para que $f(x)$ sea continua en $x = 2$ se deben cumplir las condiciones de continuidad de una función en un punto:

1] $f(2) = -4 + 2b + 1 = -3 + 2b$

2] $\lim_{x\to 2} f(x) \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} (-x^2 + bx + 1) = -3 + 2b \\ \lim_{x\to 2^+} (-2x + a) = -4 + a \end{cases}$ de donde $-3 + 2b = -4 + a$; $a - 2b = 1$

$f'(x) = \begin{cases} -2x + b & si\ x < 2 \\ -2 & si\ x > 2 \end{cases}$ que está bien definida.

Para que $f(x)$ sea derivable en $x = 2$, $f'(2)^- = -4 + b = f'(2)^+ = -2$, de donde $b = 2$.
De $a - 2b = 1$, obtenemos $a = 5$. Así

$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 1 & si\ \ x \le 2 \\ -2x + 5 & si\ x > 2 \end{cases}$ cumple las hipótesis del T. del valor medio en $[0, 4]$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)\ continua\ en\ [0,4] \\ f(x)\ derivable\ en\ (0,4) \end{array}\right\} \overset{T.Valor\ medio}{\Longrightarrow} \quad \exists c \in (0,4)\ tal\ que\ f'(c) = \frac{f(4)-f(0)}{4} = -1$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x+2 & si\ x<2 \\ -2 & si\ x>2 \end{cases}$$

Valores que cumplen la tesis del teorema:

$x<2$: $f'(c) = -2c+2 = -1 \Longrightarrow c = \frac{3}{2} \in (0,4)$ es un valor que cumple la tesis del teorema.

$x>2$: $f'(c) = -2 \neq 1$. No se cumple la tesis del teorema.

3º) Se divide un hilo de 100 metros en dos trozos, de longitudes x e y. Con el trozo de longitud x se construye un cuadrado y con el de longitud y se forma un rectángulo, cuyo lado mayor es el doble del menor. Averigua x e y para que la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo sea mínima.

Resolución

Sean x e y las longitudes de la partición del hilo .

Planteamiento del problema: $\left[\begin{array}{ll} minimizar\ \ S(x,y) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{y^2}{18} & función\ objetivo \\ \quad s.a\ \ x+y=100 & restricción \end{array}\right.$

Despejando de la restricción tenemos: $y = 100-x$ y, sustituyendo en la función objetivo:

$S(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(100-x)^2}{18}$ que es la función suma de áreas dependiente de una sola variable.

Buscamos el mínimo de la función $S(x)$:

$S'(x) = \frac{x}{8} - \frac{100-x}{9}$; $S'(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{x}{8} - \frac{100-x}{9} = 0 \Longleftrightarrow \frac{x}{8} = \frac{100-x}{9} \Longleftrightarrow 17x = 800 \Longleftrightarrow x = \frac{800}{17}m$

$y = 100 - \frac{800}{17} = \frac{900}{17}m$

Comprobamos que, efectivamente, el valor $x = \frac{800}{17}$ es mínimo de la función suma $S(x)$:

$S''(x) = \frac{1}{8} + \frac{1}{9}$; $S''\left(\frac{800}{17}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{9} > 0$ Mínimo en $x = \frac{800}{17}$.

Los valores que minimizan la suma de áreas son:

$$x = \frac{800}{17} \cong 47{,}059\ m \quad e \quad y = \frac{900}{17} \cong 52{,}941\ m$$

4º) a) Calcula $\lim_{x\to 0^+} (tgx)^{senx}$

b) Sea $f(x) = x^3 - 4x + 2$ .Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en su punto de inflexión.

Resolución

a) $\lim_{x\to 0^+} (tgx)^{senx} \overset{0^0}{\cong}$

Tomamos logaritmo neperiano:

$$ln\left(\lim_{x\to 0^+} (tgx)^{senx}\right) = \lim_{x\to 0^+} \left(ln(tgx)^{senx}\right) = \lim_{x\to 0^+} \left(senx \cdot ln(tgx)\right) \overset{0\cdot(-\infty)}{\cong} \lim_{x\to 0^+} \frac{ln(tgx)}{\frac{1}{senx}} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}\ L'Hôp}{\cong}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{tgx\cdot cos^2x}}{\frac{-cosx}{sen^2x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-senx}{cos^2x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Así $ln\left(\lim_{x\to 0^+} (tgx)^{senx}\right) = 0$ y, por tanto $\lim_{x\to 0^+} (tgx)^{senx} \overset{0^0}{\cong} e^0 = 1$

b) $f(x) = x^3 - 4x + 2$

$f'(x) = 3x^2 - 4\,;\, f''(x) = 6x\,;\, f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0\,;\, f'''(x) = 6 \neq 0$
Punto de inflexión en $P(0,2)\,;\, f(0) = 2\,;\, f'(0) = -4$
La ecuación de la recta tangente a la curva en el punto P es:

$$t \equiv y - f(0) = f'(0)\cdot(x-0) \Leftrightarrow t \equiv y - 2 = -4x$$
$$t \equiv y = -4x + 2$$

5ª) Estudia el dominio, corte con los ejes, monotonía, curvatura y asíntotas de la función $f(x) = \frac{2x^2}{x+2}$. Esboza su gráfica.

Resolución

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$

Cortes con los ejes coordenados

$$f(x) = \frac{2x^2}{x+2}\begin{cases} x = 0 \Longrightarrow y = 0 \\ y = 0 \Longrightarrow \dfrac{2x^2}{x+2} \Longrightarrow 2x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0;\ O = (0,0)\end{cases}$$

Monotonía: $f'(x) = \frac{4x\cdot(x+2) - 2x^2}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+8x}{(x+2)^2}$

Ceros: $2x^2 + 8x = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4\end{cases}$ Polos: $(x+2)^2 = 0 \Longrightarrow x = -2$

La recta real queda dividida en cuatro intervalos, $(-\infty,-4)$, $(-4,-2)$, $(-2,0)$ y $(0,+\infty)$

	$(-\infty,-4)$	$(-4,-2)$	$(-2,0)$	$(0,+\infty)$
Signo de $f'(x) = \frac{2x^2+8x}{(x+2)^2}$	$+$	$-$	$-$	$+$

Crece: $(-\infty,-4) \cup (0,+\infty)$; Decrece: $(-4,2) \cup (-2,0)$

Curvatura: $f''(x) = \frac{16}{(x+2)^3}\begin{cases} > 0 \Leftrightarrow x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2.\ (-2,+\infty 0)\ Cóncava \\ < 0 \Leftrightarrow x + 2 < 0 \Leftrightarrow x < -2.\ (-\infty,-2)\ Convexa\end{cases}$

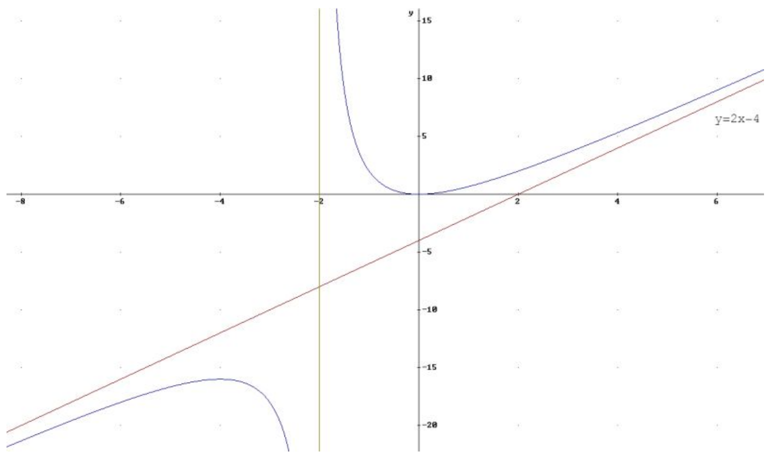
Asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^2}{x+2} \overset{\frac{8}{0}}{=} \begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{2x^2}{x+2} \overset{\frac{8}{0^-}}{=} -\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{2x^2}{x+2} \overset{\frac{8}{0^+}}{=} +\infty \end{cases}$$ La recta $x = -2$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal no tiene porque $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x+2} = \infty$

Asíntota oblicua $y = mx + n$:

$m = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2+2x} = 2$; $n = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2}{x+2} - 2x\right) = -4$; $y = 2x - 4$



Cálculo integral

6º) Calcula una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)=\frac{4x}{\left(1+\frac{x^2}{3}\right)^2}$ tal que $F(0)=1$.

Resolución

La primitiva que buscamos estará en su integral indefinida:

$$F(x)=\int \frac{4x}{\left(1+\frac{x^2}{3}\right)^2}\,dx = 4\cdot\int x\cdot\left(1+\frac{x^2}{3}\right)^{-2} dx \overset{\int f^n\cdot f}{\cong} 4\cdot\frac{3}{2}\int \frac{2}{3}x\cdot\left(1+\frac{x^2}{3}\right)^{-2} dx = \frac{-6}{\left(1+\frac{x^2}{3}\right)}+c$$

$$F(0)=1 \Leftrightarrow -6+c=1 \Leftrightarrow c=7$$

$$\text{La primitiva es } F(x)=\frac{-6}{\left(1+\frac{x^2}{3}\right)}+7$$

7º) Calcula las siguientes integrales:

a) $\int x\cdot e^{-5x}dx$ **b)** $\int \frac{5x+2}{x^2+5}\,dx$ **c)** $\int \frac{1}{x^2+x}\,dx$

Resolución

a) $$\int x\cdot e^{-5x}dx = -\frac{x}{5}\cdot e^{-5x}+\frac{1}{5}\int e^{-5x}dx = -\frac{x}{5}\cdot e^{-5x}-\frac{1}{25}e^{-5x}+c = -\frac{e^{-5x}}{5}\cdot\left(x+\frac{1}{5}\right)+c$$

$$\begin{matrix} u=x \\ dv=e^{-5x}\,dx \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} du=dx \\ v=\int dv=\int e^{-5x}dx=-\frac{1}{5}e^{-5x} \end{matrix}$$

b) $$I=\int \frac{5x+2}{x^2+5}\,dx = \int \frac{5x}{x^2+5}\,dx+\int \frac{2}{x^2+5}\,dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x}{x^2+5}\,dx + I_1 = \frac{5}{2}\cdot L|x^2+5|+I_1$$

$$I_1=\int \frac{2}{5+x^2}\,dx = \int \frac{\frac{2}{5}}{\frac{5+x^2}{5}}\,dx = \int \frac{\frac{2}{5}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\int \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot arctg\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+c_1$$

$$I=\int \frac{5x+2}{x^2+5}\,dx = \frac{5}{2}\cdot L|x^2+5|+\frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot arctg\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+c$$

c) $\int \frac{1}{x^2+x}\,dx$ Integral racional. $x^2+x=0 \Longrightarrow x=0$; $x=-1$. Raíces reales simples

Descomponemos el integrando en suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{x\cdot(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}=\frac{A\cdot(x+1)+B\cdot x}{x\cdot(x+1)}$$

$$1=A\cdot(x+1)+B\cdot x$$

Sustituyendo $x=$ y $x=-1$ obtenemos $\begin{cases} 1=A \\ 1=-B \end{cases}$ de donde $A=1$ y $B=-1$

Por tanto:

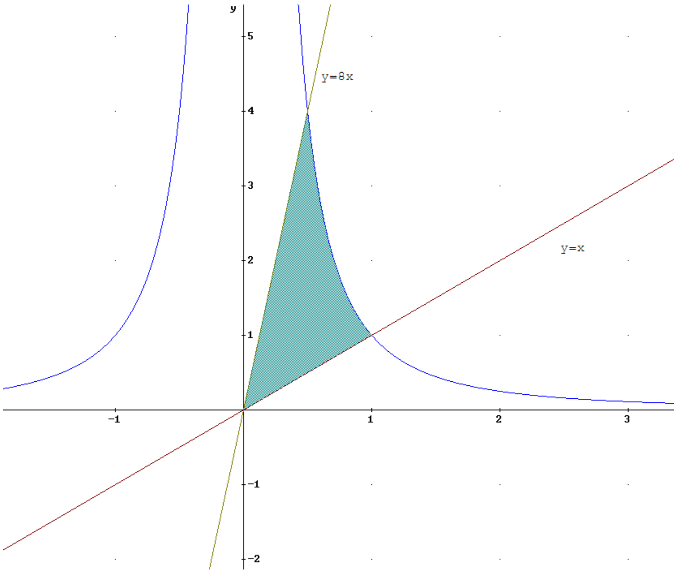
$$\int \frac{1}{x^2+x}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx = L|x|-L|x+1|+c$$

8º) Dibuja el recinto comprendido entre las gráficas de las siguientes funciones

$$y=\frac{1}{x^2} \;;\; y=x \;;\; y=8x$$

y calcula su área.

Resolución



Cortes $y = \frac{1}{x^2}$ e $y = x$:

$$\frac{1}{x^2} = x \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

Cortes $y = \frac{1}{x^2}$ e $y = 8x$:

$$\frac{1}{x^2} = 8x \Rightarrow 8x^3 = 1 \Rightarrow x = 1/2$$

Cortes $y = x$ e $y = 8x$:

$$8x = x \Rightarrow 7x = 0 \Rightarrow x = 0$$

El área pedida es:

$$A = \int_0^{1/2} 7x\, dx + \int_{1/2}^{1} \left(\frac{1}{x^2} - x\right)\, dx = \left[\frac{7x^2}{2}\right]_0^{1/2} + \left[-\frac{1}{x} - \frac{x^2}{2}\right]_{1/2}^{1} = \frac{7}{8} - 1 - \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{8} = \frac{3}{2}\, u^2$$

Puntuación

Cálculo diferencial:

1, 2, 3, 4, 5 -------------- 2 puntos

Cálculo Integral

6 ------------------------- 1'5 "

7 ------------------------- 4,5 "

8 ------------------------- 4 "