**1º) La probabilidad de que, en un cierto mes, un cliente de una gran superficie compre un producto $A$ es $0{,}6$; la probabilidad de que compre un producto $B$ es $0{,}5$. Se sabe también que la probabilidad de que un cliente compre un producto $B$ no habiendo comprado el producto A es $0{,}4$.**
**a) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente haya comprado solo el producto $B$?**
**b) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente no haya comprado ninguno de los dos productos?**
**c) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente haya comprado solo uno de los dos productos?**
**d) ¿Son independientes los sucesos comprar el producto $A$ y comprar el producto $B$? Razona la contestación.**

**Resolución**

Consideramos los sucesos siguientes:

$$A = "Comprar\ el\ producto\ A" \ ; \quad B = "Comprar\ el\ producto\ B"$$

Del enunciado tenemos que:

$$p(A) = 0'6 \ ; \ p(B) = 0'5 \ ; \ p(B|\bar{A}) = 0'4$$

Deducimos que $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0'6 = 0'4$

a) $p(B|\bar{A}) = 0'4 \Leftrightarrow \frac{p(B\cap\bar{A})}{p(\bar{A})} = 0'4 \Leftrightarrow p(B \cap \bar{A}) = 0'4 \cdot p(\bar{A}) = 0'4 \cdot 0'4 = 0'16$

Por tanto, la probabilidad de que un cliente solo haya comprado el producto $B$ es:

$$p(B \cap \bar{A}) = 0'16$$

b) Como $p(B|\bar{A}) = 0'4$ , tenemos que $p(\bar{B}|\bar{A}) = 1 - p(B|\bar{A}) = 1 - 0'4 = 0'6$, es decir,

$$p(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{\mathrm{p}(\bar{\mathrm{B}} \cap \bar{\mathrm{A}})}{\mathrm{p}(\bar{\mathrm{A}})} = 0'6$$

$$\text{de donde } \mathrm{p}(\bar{\mathrm{B}} \cap \bar{\mathrm{A}}) = 0'6 \cdot \mathrm{p}(\bar{\mathrm{A}}) = 0'6 \cdot 0'4 = 0'24$$

La probabilidad de que un cliente no haya comprado ninguno de los dos productos es:

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0'24$$

c) $p((A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})) = p(A \cup B) - p(A \cap B) \overset{[1],[2]}{\triangleq} 0{,}76 - 0{,}34 = 0{,}42$

[1] $p(A \cup B) = 1 - p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0{,}24 = 0{,}76$

[2] $p(B \cap \bar{A}) = p(B) - p(A \cap B) \Longrightarrow p(A \cap B) = p(B) - p(B \cap \bar{A}) = 0{,}5 - 0{,}16 = 0{,}34$

d) Como $0{,}34 = p(A \cap B) \neq p(A) \cdot p(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}3$, los sucesos $A$ y $B$ no son independientes.

**2º) En el departamento de lácteos de un supermercado se encuentran mezclados y a la venta $100$ yogures de la marca $A$, $60$ de la marca $B$ y $40$ de la marca $C$. La probabilidad de que un yogur de la marca $A$ está caducado es $0{,}01$; $0{,}02$ para la marca $B$ y $0{,}03$ para la marca $C$.**
**Un comprador elige un yogur a azar:**
**a) Calcula la probabilidad de que está caducado.**
**b) Sabiendo que el yogur elegido está caducado, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca $B$?**
**c) ¿cuál es la probabilidad de que no está caducado y sea de la marca $A$?**

**Resolución**

Consideramos los sucesos siguientes:

$A =$ " *El yogur elegido es la marca A*"

$B =$ " *El yogur elegido es la marca B*" ; $S =$ " *El yogur elegido está caducado*"

$C =$ " *El yogur elegido es la marca C*" ;

Del enunciado tenemos que $p(A) = 0{,}5$ ; $p(B) = 0{,}3$ ; $p(C) = 0{,}2$

Además $p(S|A) = 0{,}01$ ; $p(S|B) = 0{,}02$ ; $p(S|C) = 0{,}03$ ; $p(\bar{S}|A) = 1 - p(S|A) = 0{,}99$

a) $p(S) \overset{P.Total}{=} p(A) \cdot p(S|A) + p(B) \cdot p(S|B) + p(C) \cdot p(S|C) =$

$$= 0{,}5 \cdot 0{,}01 + 0{,}3 \cdot 0{,}02 + 0{,}2 \cdot 0{,}03 = 0{,}017$$

b) $p(B|S) \overset{T.Bayes}{=} \frac{p(B \cap S)}{p(S)} = \frac{p(B) \cdot p(S|B)}{p(S)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}02}{0{,}017} = \frac{0{,}006}{0{,}017} = \frac{6}{17} \cong 0{,}353$

c) $p(A \cap \bar{S}) = p(A) \cdot p(\bar{S}|A) = 0{,}5 \cdot 0{,}99 = 0{,}495$

**3º) Se sabe que un determinado medicamento produce mejoría de cierta enfermedad a dos de cada tres pacientes.**
**a) Si se les administra a siete enfermos, calcular la probabilidad de que mejoren por lo menos 2.**
**Si se les administra a 270 enfermos,**
**b) calcular la probabilidad de que mejoren más de 190 personas.**
**c) calcular la probabilidad de que mejoren exactamente 190 personas.**

**Resolución**

a) Sea el suceso $A =$ "*El medicamento produce cierta mejoría en el paciente*"

$$p(A) = \frac{2}{3} = p \;\; ; \;\; p(\bar{A}) = \frac{1}{3} = q$$

Definimos la variable aleatoria

$X =$ "*Número de pacientes que experimentan cierta mejoría*";

a) $n = 7$ ; $X \hookrightarrow B\left(7, \frac{2}{3}\right)$

$$p(X \geq 2) = 1 - p(X < 2) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1) = 1 - \binom{7}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 - \binom{7}{1}\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 = 0{,}9974$$

b) Se trata de un binomial $X \hookrightarrow B(270, \frac{2}{3})$. Como $n \cdot p \cdot q = 60 > 10$ , podemos aproximarla por una normal $X \hookrightarrow N\left(np, \sqrt{npq}\,\right)$, esto es, $X \hookrightarrow N\left(180, \sqrt{60}\right)$, $X \hookrightarrow N(180; 7{,}75)$.

$p(X > 190) = 1 - p(X \leq 190) = 1 - p\left(Z \leq \frac{190-180}{7{,}75}\right) = 1 - p(Z \leq 1{,}29) = 1 - 0{,}9015$

$= 0{,}0985$

c) $p(X = 190) = p(189{,}5 \leq X \leq 190{,}5) = p\left(\frac{189{,}5-180}{7{,}75} \leq Z \leq \frac{190{,}5-180}{7{,}75}\right) =$

$= p(1{,}23 \leq Z \leq 1{,}35) = p(Z \leq 1{,}35) - p(Z < 1{,}23) = 0{,}9115 - 0{,}8907 = 0{,}0208$

**4º) En la asignatura de psicología evolutiva se ha podido determinar que las calificaciones se distribuyen según una normal de media 5,5 puntos y desviación típica 1,2 puntos.**
**a) Determina el porcentaje de alumnos con calificación comprendida entre 4 y 6,7 puntos.**
**b) ¿En qué intervalo, centrado en la media, se encontrará el 95% de los alumnos?**
**c) ¿A partir de qué nota se encontrará el 10,75% de los alumnos mejor calificados?**

**d) Si hay 240 alumnos matriculados en la asignatura, ¿cuántos de ellos obtienen una calificación inferior a 4?**

**Resolución**

Definimos la variable $X =$ Calificación en la asignatura de psicología"; $X \to N(5{,}5; 1{,}2)$

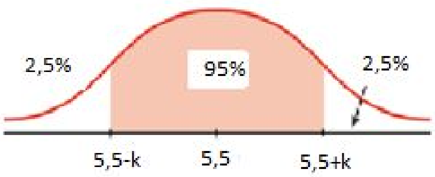
a) $p(4 \le X \le 6{,}7) = p\left(\frac{4-5{,}5}{1{,}2} \le Z \le \frac{6{,}7-5{,}5}{1{,}2}\right) = p(-1{,}25 \le Z \le 1) =$

$$p(Z \le 1) - p(Z < -1{,}25) = p(Z \le 1) - p(Z > 1{,}25) = p(Z \le 1) - 1 + p(Z \le 1{,}25) =$$

$=0{,}8413 - 1 + 0{,}8944 = 0{,}7357.$

El porcentaje de alumnos con calificación comprendida entre 4 y 6,7 puntos es el 73,57%.

b) Se trata de hallar el intervalo $(5{,}5 - k, 5{,}5 + k)$ tal que $p(5{,}5 - k \le X \le 5{,}5 + k)$=0,95, o lo que es lo mismo $p(X \le 5{,}5 + k) = 0{,}975$




$$p(X \le 5{,}5 + k) = 0{,}975 \Leftrightarrow p\left(Z \le \frac{k}{1{,}2}\right) = 0{,}975 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{1{,}2} = 1{,}96 \Leftrightarrow k = 2{,}352$$

El intervalo buscado es $(5{,}5 - 2{,}352, 5{,}5 + 2{,}352) = (3{,}148;\ 7{,}852)$

c) Razonando como en el apartado anterior, se trata de hallar el valor $5{,}5 + k$ tal que el 89,25% de los alumnos tengan calificación inferior a ese valor, $p(X \le 5{,}5 + k) = 0{,}8925$.

$$p(X \le 5{,}5 + k) = 0{,}8925 \Leftrightarrow p\left(Z \le \frac{k}{1{,}2}\right) = 0{,}8925 \Leftrightarrow \frac{k}{1{,}2} = 1{,}24 \Leftrightarrow k = 1{,}488$$

A partir de $5{,}5 + 1{,}488 = 6{,}988$ puntos se encuentra el 10,25% de los alumnos con mejores calificaciones

d) $p(X < 4) = p\left(Z < \frac{4-5{,}5}{1{,}2}\right) = p(Z < -1{,}25) = p(Z > 1{,}25) = 1 - p(Z \le 1{,}25) = 0{,}1056$

$$240 \cdot 0{,}1056 = 25{,}344$$

25 alumnos obtienen una calificación inferior a 4.

---

**Puntuación**

0,7 puntos cada apartado. (suma adicional de 0,2 puntos, proporcional al número de respuestas correctas)