Cálculo diferencial

1º) Demuestra que la ecuación $2x^3 + 6x - 1 = 0$ tiene exactamente una raíz real y calcúlala con dos cifras decimales exactas.

Resolución

Sea $f(x) = 2x^3 + 6x - 1$ continua en $\mathbb{R}$ por ser polinómica.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ es\ continua\ en\ [0,1] \\ f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = 7 > 0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \exists c_1 \in (0,1)\ tal\ que\ f(c_1) = 0 \Leftrightarrow 2{c_1}^3 + 6c_1 - 1 = 0$$

Por tanto, la ecuación $2x^3 + 6x - 1 = 0$ tiene, al menos, una raíz $c_1 \in (0,1)$

Veamos que no tiene más :

Supongamos que c_2 fuese otra raíz de la ecuación , esto es $f(c_2) = 0$. Aplicando el teorema de Rolle a la función $f(x)$ en el intervalo (c_1, c_2) se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ continua\ en\ [c_1, c_2] \\ f(x)\ derivable\ en\ (c_1, c_2) \\ f(c_1) = f(c_2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists x_1 \in (c_1, c_2)\ tal\ que\ f'(x_1) = 0$$

es decir, encontramos un punto x_1 de derivada nula.

Sin embargo, $f'(x) = 6x^2 + 6$ y $6x^2 + 6 = 0$ no tiene solución real ; esto contradice la existencia de un valor x_1 con derivada nula. La contradicción viene de suponer la existencia de una segunda raíz c_2. Por tanto, la ecuación tiene exactamente una raíz c_1.

Por otro lado,

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ es\ continua\ en\ [0'1, 0'2] \\ f(0'1) = -0{,}398 < 0 \\ f(0'2) = 0{,}216 > 0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \exists c_1 \in (0'1, 0'2)\ tal\ que\ f(c_1) = 0$$

Así la raíz, con una cifra decimal exacta es $c_1 = 0{,}1$ ....

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ es\ continua\ en\ [0'16, 0'17] \\ f(0'16) = -0{,}031808 < 0 \\ f(0'17) = 0{,}029826 > 0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \exists c_1 \in (0'16, 0'17)\ tal\ que\ f(c_1) = 0$$

Así la raíz, con dos cifras decimales exactas, es $c_1 = 0{,}16$ ....

2º) Halla los valores de a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x} & si -2 \le x \le -1 \\ \frac{x^2 - b}{2} & si -1 < x \le 0 \end{cases}$

cumpla las hipótesis del teorema del valor medio de Lagrange en el intervalo $[-2, 0]$, calcula después el valor o valores de x para los que se cumple la tesis en el intervalo.

Resolución

a) $\forall x \in \mathbb{R}\ -2 \le x < -1,\ f(x) = \frac{a}{x}$ continua por ser racional y $x \ne 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}\ -1 < x \le 0,\ f(x) = \frac{x^2 - b}{2}$ continua por ser polinómica.

Para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$ se deben cumplir las condiciones de continuidad de una función en un punto:

1] $f(-1) = -a$

2] $\lim\limits_{x\to -1} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} \frac{a}{x} = -a \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{x^2-b}{2} = \frac{1-b}{2} \end{cases}$ de donde $-a = \frac{1-b}{2}$; $2a - b = -1$ [1]

$f'(x) = \begin{cases} \frac{-a}{x^2} & si -2 < x < -1 \\ x & si -1 < x < 0 \end{cases}$ que está bien definida.

Para que sea derivable en $x = -1$, $f'(-1)^- = -a = f'(-1)^+ = -1$, de donde $a = 1$, y, sustituyendo en [1], obtenemos $b = 3$.

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si -2 \le x \le -1 \\ \frac{x^2-3}{2} & si -1 < x \le 0 \end{cases}$ cumple las hipótesis del T. del valor medio en $[-2, 0]$

$$\left.\begin{matrix} f(x)\ continua\ en\ [-2,0] \\ f(x)\ derivable\ en\ (-2,0) \end{matrix}\right\} \overset{T.Valor\ medio}{\Longrightarrow} \exists c \in (-2,0)\ tal\ que\ f'(c) = \frac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)} = \frac{-1}{2}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x^2} & si -2 < x \le -1 \\ x & si -1 < x < 0 \end{cases}$$

$f'(c) = \frac{-1}{c^2} = \frac{-1}{2} \Longrightarrow c^2 = 2 \Longrightarrow c = \pm\sqrt{2}$. Como solo $c = -\sqrt{2} \in (-2,-1)$, es un valor que cumple la tesis del teorema.

$f'(c) = c = \frac{-1}{2} \in (-1, 0)$ también es un valor que cumple la tesis del teorema.

Por tanto, hay dos valores en el intervalo $[-2, 0]$ que cumplen la tesis del teorema del valor medio de Lagrange: $c_1 = -\sqrt{2} \in (-2,-1)$ y $c_2 = \frac{-1}{2} \in (-1, 0)$

3º) Calcula las dimensiones de tres campos cuadrados, de modo que el perímetro de uno de ellos sea el triple del perímetro de otro, se necesiten exactamente 1248 m de valla para vallar los tres campos y la suma de las áreas de los tres campos sea la mínima pos ible.

Resolución

Sean x e y las longitudes de los lados, en metros, de dos de los campos. El lado del tercer campo queda determinado por tener perímetro triple de uno de ellos (suponemos del cuadrado de lado x) y será $3x$.

Planteamiento del problema: $\left[\begin{matrix} minimizar\ \ S(x,y) = 10x^2 + y^2 & función\ objetivo \\ s.a\ \ 16x + 4y = 1248 & restricción \end{matrix}\right.$

Despejando de la restricción tenemos: $y = \frac{1248-16x}{4}$ [1] y, sustituyendo en la función objetivo:

$S(x) = 10x^2 + \frac{1}{16}\cdot(1248-16x)^2$ que es la función suma de áreas dependiente de una sola variable.

Buscamos el mínimo de la función $S(x)$:

$S'(x) = 20x - 2\cdot(1248-16x)$; $S'(x) = 0 \iff 52x - 2496 = 0 \iff x = \frac{2496}{52} = 48$ m e $y = \frac{1248-16\cdot 48}{4} = \frac{480}{4} = 120\ m$

Comprobamos que, efectivamente, el valor $x = 48$ es mínimo de la función suma $S(x)$:

$S''(x) = 20 + 32 = 52$; $S''(48) = 52 > 0$ Mínimo en $x = 48$

Los tres campos son cuadrados de lados $48\ m$, $120\ m$ y $144\ m$.

4º) a) Calcula $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1-senx}\right)^{cotgx}$

b) Sea $f(x)=(1-x)\cdot e^{-x}$**. Calcula la ecuación de la recta tangente a** $f(x)$ **en su punto de inflexión.**

Resolución

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1-senx}\right)^{cotgx}\overset{\infty^0}{=}$; Tomamos logaritmo:

$ln\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1-senx}\right)^{cotgx}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(ln\left(\frac{1}{1-senx}\right)^{cotgx}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(cotgx\cdot ln\left(\frac{1}{1-senx}\right)\right)\overset{0\cdot\infty}{\triangleq}$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ln\left(\frac{1}{1-senx}\right)}{tgx}\overset{\frac{\infty}{\infty}L'Hôp}{\triangleq}\lim\limits_{x\to}\frac{\pi}{2}\frac{(1-senx)\cdot\frac{cosx}{(1-senx)^2}}{\frac{1}{cos^2x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{cos^3x}{1-senx}\overset{\frac{0}{0}L'Hôp}{\triangleq}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-3cos^2x\cdot senx}{-cosx}=$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(3\cdot cosx\cdot senx)=3\cdot 0\cdot 1=0$

$$ln\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1-senx}\right)^{cotgx}\right)=0\Longrightarrow\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1-senx}\right)^{cotgx}=e^0=1$$

b) $f(x)=(1-x)\cdot e^{-x}$; $f'(x)=-e^{-x}-(1-x)e^{-x}=-e^{-x}\cdot(2-x)$

$f''(x)=e^{-x}\cdot(2-x)+e^{-x}=e^{-x}\cdot(3-x)$

$$f''(x)=0\Longleftrightarrow e^{-x}\cdot(3-x)=0\Longleftrightarrow 3-x=0\Longleftrightarrow x=3$$

	$(-\infty,3)$	$(3,+\infty)$
Signo de $f''(x)=e^{-x}\cdot(3-x)$	$+$	$-$

$f(x)$ cóncava en $(-\infty,3)$ y convexa en $(3,+\infty)$

Por tanto $x=3$ es un punto de inflexión: $P\left(3,\frac{-2}{e^3}\right)$.

Pendiente de la recta tangente en P: $f'(3)=\frac{1}{e^3}$

La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $P\left(3,\frac{-2}{e^3}\right)$ es:

$$t\equiv y+\frac{2}{e^3}=\frac{1}{e^3}\cdot(x-3)$$

5º) Estudia el dominio, corte con los ejes, monotonía, curvatura y asíntotas de la función $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$**. Esboza su gráfica.**

Resolución

$Dom(f)=\mathbb{R}-\{0\}$

Cortes con los ejes coordenados

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x}\begin{cases}x=0\Longrightarrow y\quad indefinida\\ y=0\Longrightarrow\dfrac{x^2-1}{x}\Longrightarrow x^2-1=0\Longrightarrow x=\pm1;\ \ Q(-1,0)\ y\ R(1,0)\end{cases}$$

Monotonía: $f'(x)=\frac{2x\cdot x-(x^2-1)}{x^2}=\frac{x^2+1}{x^2}>0$ en el dominio. Creciente.

Curvatura: $f''(x)=\frac{2x\cdot x^2-(x^2+1)\cdot 2x}{x^4}=\frac{-2}{x^3}$

$$f''(x)=\frac{-2}{x^3}\begin{cases}>0\Longleftrightarrow x^3<0\Longleftrightarrow x<0.\,(-\infty,0)\ Cóncava\\<0\Longleftrightarrow x^3>0\Longleftrightarrow x>0.\,(0,+\infty)\ Convexa\end{cases}$$

Asíntotas verticales:

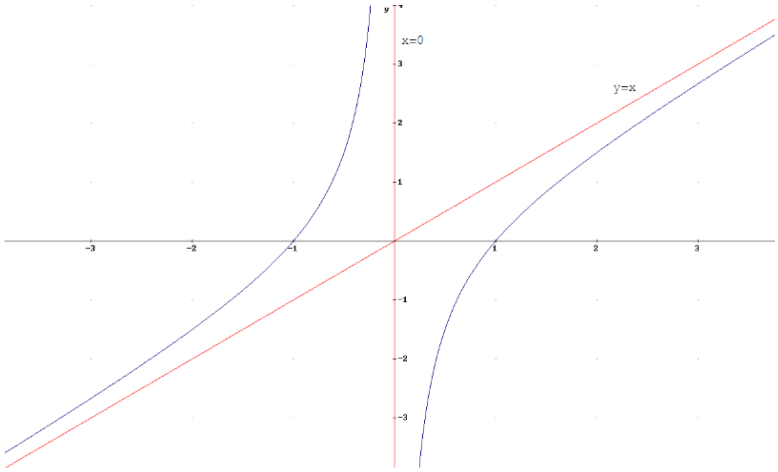
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x}\overset{\frac{-1}{0}}{=}\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2-1}{x}\overset{\frac{-1}{0^-}}{=}+\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2-1}{x}\overset{\frac{-1}{0^+}}{=}-\infty\end{cases}\qquad \text{la recta } x=0 \text{ es asíntota vertical.}$$

Asíntota horizontal no tiene porque $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-1}{x}=\pm\infty$

Asíntota oblicua: $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2-1}{x}}{x}=1\quad ;\ n=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}-x\right)=0$$

La recta $y=x$ es asíntota oblicua



Cálculo integral

6º) Calcula una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)=\frac{4x}{\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}}$ tal que $F(0)=1$.

Resolución

La primitiva que buscamos estará en su integral indefinida:

$$F(x)=\int\frac{4x}{\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}}\,dx=4\cdot\int\frac{x}{\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}}\,dx\overset{\int\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}}{=}4\cdot 2\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}+c=8\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}+c$$

$$F(0)=1\Leftrightarrow 8+c=1\Leftrightarrow c=-7$$

$$\text{La primitiva es } F(x)=8\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}-7$$

7º) Calcula las siguientes integrales:

a) $\int\frac{x-1}{e^{-2x}}\,dx$ **b)** $\int\frac{3x-1}{16+x^2}\,dx$ **c)** $\int\frac{x}{(x-1)\cdot(x+2)}\,dx$

Resolución

a)

$$I=\int\frac{x-1}{e^{-2x}}\,dx=\int(x-1)\cdot e^{2x}\,dx\quad \begin{matrix}u=x-1\\ dv=e^{2x}\,dx\end{matrix}\ \Longrightarrow\ \begin{matrix}du=dx\\ v=\int dv=\int e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}\end{matrix}$$

Así aplicando la fórmula de integración por partes, obtenemos la integral

$$I=\int (x-1)e^{2x}\,dx=\frac{(x-1)e^{x}}{2}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx=\frac{(x-1)e^{2x}}{2}-\frac{e^{2x}}{4}+c=\frac{e^{2x}}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)+c$$

b) $I=\int \frac{3x-1}{16+x^2}\,dx=\int \frac{3x}{16+x^2}\,dx-\int \frac{1}{16+x^2}\,dx=\frac{3}{2}\int \frac{2x}{16+x^2}\,dx-I_1=\frac{3}{2}\cdot L|16+x^2|-I_1$

$I_1=\int \frac{1}{16+x^2}\,dx=\int \frac{\frac{1}{16}}{\frac{16+x^2}{16}}\,dx=\int \frac{\frac{1}{16}}{1+\left(\frac{x}{4}\right)^2}\,dx=\frac{1}{4}\cdot\int \frac{\frac{1}{4}}{1+\left(\frac{x}{4}\right)^2}\,dx=\frac{1}{4}\cdot arctg\left(\frac{x}{4}\right)$

$$I=\int \frac{3x-1}{16+x^2}\,dx=\frac{3}{2}\cdot L|16+x^2|-\frac{1}{4}\cdot arctg\left(\frac{x}{4}\right)+c$$

c) $\int \frac{x}{(x-1)\cdot(x+2)}\,dx$ Integral racional. Denominador con raíces reales simples.

Descomponemos el integrando en suma de fracciones simples:

$$\frac{x}{(x-1)\cdot(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A\cdot(x+2)+B\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x+2)}$$

y, por tanto,

$$x=A\cdot(x+2)+B\cdot(x-1)$$

Sustituyendo $x=1$ y $x=-2$ obtenemos $\begin{cases}1=3A\\-2=-3B\end{cases}$ de donde $A=1/3$ y $B=2/3$

Por tanto:

$$\int \frac{x}{(x-1)\cdot(x+2)}\,dx=\int \frac{1/3}{x-1}\,dx+\int \frac{2/3}{x+2}\,dx=\frac{1}{3}L|x-1|+\frac{2}{3}L|x+2|+c$$

8º) Halla el área de la región del plano limitada por la parábola $y=-x^2-2x+3$ $(x\le 0)$, el eje de abscisas OX y el segmento que determina la recta $3x-2y+6=0$ con los ejes coordenados.

Resolución

Representamos la parábola $y=-x^2-2x+3$ y la recta $y=\frac{3x+6}{2}$

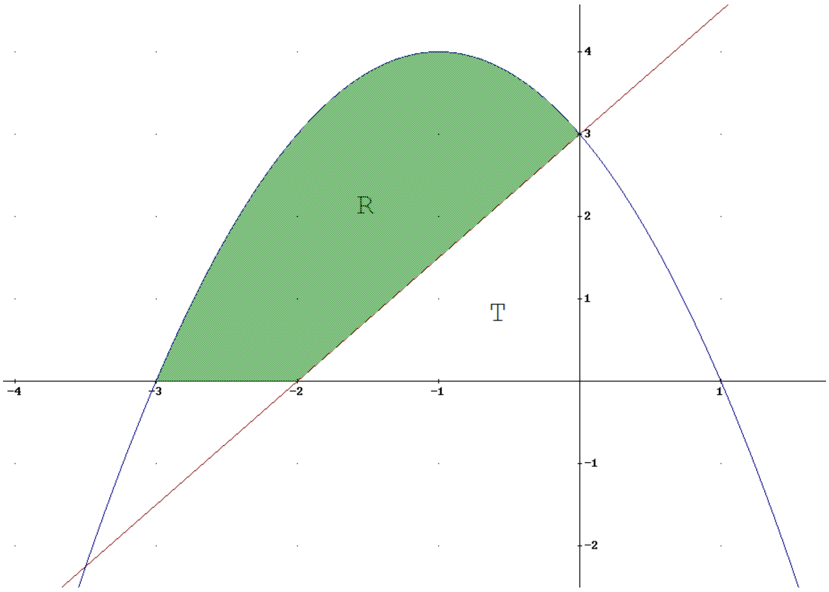
Parábola: Cortes con eje OX: $(-3,0)$ y $(1,0)$; Cortes con eje OY: $(0,3)$

Vértice:

$y'=-2x-2$; $y'=0 \Leftrightarrow -2x-2=0 \Leftrightarrow x=-1$; $V(-1,4)$

Cortes parábola y recta:

$$-x^2-2x+3=\frac{3x+6}{2}\Leftrightarrow -2x^2-7x=0\Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\x=-7/2\end{cases}$$



El área de la región R sombreada es la que tenemos que calcular:

$$\acute{A}rea(R)=\int_{-3}^{0}(-x^2-2x+3)\,dx-\acute{A}rea(T)$$

$$\int_{-3}^{0}(-x^2-2x+3)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right]_{-3}^{0}=0-(9-9-9)=9\,u^2$$

$\acute{A}rea(T)=\frac{2\cdot 3}{2}=3\,u^2$

$$\acute{A}rea(R)=\int_{-3}^{0}(-x^2-2x+3)\,dx-\acute{A}rea(T)=9-3=6\,u^2$$

Puntuación

Cálculo diferencial:

1, 2, 3, 4, 5 -------------- 2 puntos

Cálculo Integral

6 ------------------------- 1'5 "

7 ------------------------- 4,5 "

8 ------------------------- 4 "