ESPACIO AFIN EUCLIDEO

Definición.

Se llama espacio afín euclideo a un espacio afín asociado a un espacio vectorial euclideo.

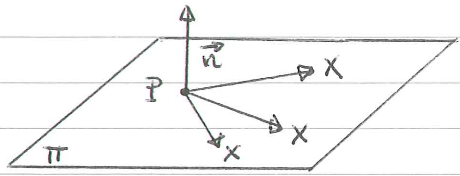
Vamos a trabajar con el sistema de referencia más cómodo, el formado por un punto arbitrario O llamado origen, y por una base ortonormal. A estos sistemas de referencia se les llama métricos u ortonormales.

PERPENDICULARIDAD

En el espacio afín euclideo consideremos el plano π de ecuación $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ y $P(x_0,y_0,z_0)$ un punto del mismo.
Como $P\in\pi$ tenemos $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$.
Restando miembro a miembro ambas expresiones obtenemos:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \quad [1]$$

donde $X(x,y,z)$ es un punto cualquiera de π.
Sea $\vec{n}(A,B,C)$.
$\vec{PX}(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)$.



De la expresión [1] tenemos que el vector $\vec{n}$ es ortogonal al vector $\vec{PX}$ y como $\vec{PX}$ es cualquier vector del plano π se cumple que en el plano $Ax+By+Cz+D=0$, el vector $\vec{n}(A,B,C)$ es perpendicular al plano. Al vector $\vec{n}$ se le llama vector normal ó característico del plano π.

Ecuación normal del plano.

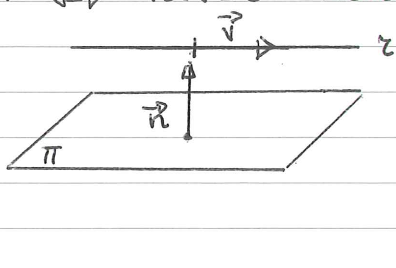
La expresión [1] del apartado anterior se puede escribir $\vec{PX}\cdot\vec{n}=0$ y se llama ecuación normal del plano π.

Condición necesaria y suficiente de paralelismo de recta y plano.

Sea $r \equiv \dfrac{x-x_0}{v_1}=\dfrac{y-y_0}{v_2}=\dfrac{z-z_0}{v_3}$ y $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$.

r es paralela a $\pi \iff \vec{n}\cdot\vec{v}=0$ siendo $\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$ y $\vec{n}(A,B,C)$.

$$v_1.A+v_2.B+v_3.C=0$$



Angulo de dos rectas

Sean r y s dos rectas con vectores de dirección $\vec{u}(u_1 u_2 u_3)$ y $\vec{v}(v_1 v_2 v_3)$. Se llama ángulo que forman r y s al ángulo agudo determinado por los vectores de dirección $\vec{u}$ y $\vec{v}$. (Este ángulo coincide o es suplementario con el que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$)

$$\cos(\widehat{r,s}) = |\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})| = \frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \frac{|u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3|}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}$$

Observemos que si $\vec{u}.\vec{v}=0$ entonces $\cos(\widehat{r,s})=0$, es decir $(\widehat{r,s})=\frac{\pi}{2}$ y r y s son perpendiculares.

Luego r y s son perpendiculares $\Longleftrightarrow u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = 0$

Angulo de dos planos.

Sean π y π' dos planos con vectores normales $\vec{n}(A,B,C)$ y $\vec{n}'(A',B',C')$. Se llama ángulo que forman π y π' al ángulo agudo determinado por los vectores $\vec{n}$ y $\vec{n}'$. (El ángulo que forman dos planos coincide con el menor de los ángulos diedros que definen dichos planos).

$$\cos(\widehat{\pi,\pi'}) = |\cos(\widehat{\vec{n},\vec{n}'})| = \frac{|\vec{n}.\vec{n}'|}{|\vec{n}|.|\vec{n}'|} = \frac{|A.A' + B.B' + C.C'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

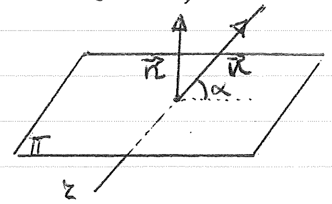
Observemos que si $\vec{n}.\vec{n}'=0$ entonces $\cos(\widehat{\pi,\pi'})=0$, es decir $(\widehat{\pi,\pi'})=\frac{\pi}{2}$ y son perpendiculares.

Luego π y π' son perpendiculares $\Longleftrightarrow A.A' + B.B' + C.C' = 0$

Angulo entre recta y plano.

Sea r recta con vector de dirección $\vec{u}(u_1 u_2 u_3)$ y π plano con vector normal $\vec{n}(A,B,C)$.

Se llama ángulo que forman r y π al complementario del ángulo agudo que forman $\vec{u}$ y $\vec{n}$



$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = |\cos(\widehat{\vec{u},\vec{n}})| = \frac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|} = \frac{|u_1.A + u_2 B + u_3.C|}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Observemos que si r y π son perpendiculares, $\vec{n}$ y $\vec{u}$ tienen la misma dirección y por tanto sus componentes son proporcionales.

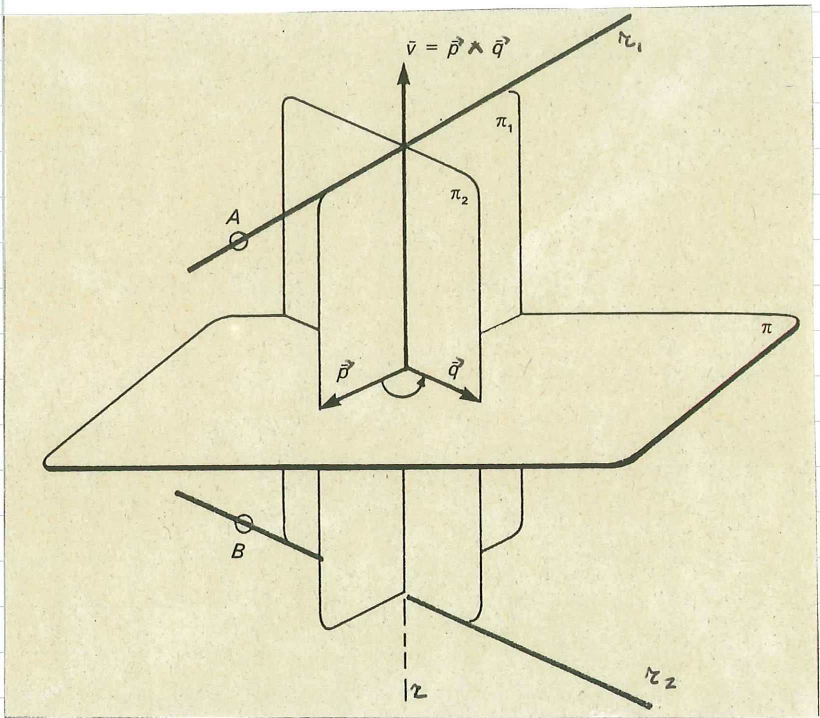
Luego r y π son perpendiculares $\Longleftrightarrow \frac{u_1}{A} = \frac{u_2}{B} = \frac{u_3}{C}$

Perpendicular común a dos rectas

Sean r_1 y r_2 dos rectas que se cruzan. Para determinar la ecuación de la recta r perpendicular común a r_1 y r_2 se usa el siguiente procedimiento geométrico:

- Se considera un plano π paralelo a r_1 y a r_2.
- Se considera el plano π_1 perpendicular a π que contenga a r_1.
- Se considera el plano π_2 perpendicular a π que contenga a r_2.

La recta pedida r es $r = \pi_1 \cap \pi_2$. (Ver figura).



r_1: recta que pasa por A y tiene la dirección de $\vec{p}$
r_2: recta que pasa por B y tiene la dirección de $\vec{q}$

La recta r (solución) tendrá la dirección del vector $\vec{v} = \vec{p} \wedge \vec{q}$ ya que es perpendicular a r_1 y a r_2.

- Otro procedimiento para determinar la perpendicular común a dos rectas r_1 y r_2 es el siguiente:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = a_1 + p_1 t \\ y = a_2 + p_2 t \\ z = a_3 + p_3 t \end{cases} ; \quad r_2 \equiv \begin{cases} x = b_1 + q_1 s \\ y = b_2 + q_2 s \\ z = b_3 + q_3 s. \end{cases}$$

Sean M y N los puntos de r_1 y r_2 respectivamente en los que corta la perpendicular común a dichas rectas.

$M \in r_1 \Rightarrow M(a_1 + p_1 t, a_2 + p_2 t, a_3 + p_3 t)$

$N \in r_2 \Rightarrow N(b_1 + q_1 s, b_2 + q_2 s, b_3 + q_3 s)$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{MN} \perp \vec{p} \Rightarrow \vec{MN} \cdot \vec{p} = 0 \\ \vec{MN} \perp \vec{q} \Rightarrow \vec{MN} \cdot \vec{q} = 0 \end{array}\right\}$$ Sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (t y s) que se resuelve.

Una vez determinados M y N la recta buscada r es la que pasa por estos puntos.

DISTANCIAS EN EL ESPACIO AFIN EUCLIDEO

Distancia entre dos puntos.

Sea V el espacio afín euclídeo tridimensional.
$\forall A, B \in V$ definimos distancia entre A y B como el módulo de $\vec{AB}$

$$d(A,B) = |\vec{AB}|.$$

$A(x_1, y_1, z_1)$
$B(x_2, y_2, z_2)$ $\quad d(A,B) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$ $\quad$ Expresión analítica en base ortonormal.
$\vec{AB}(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$

Propiedades

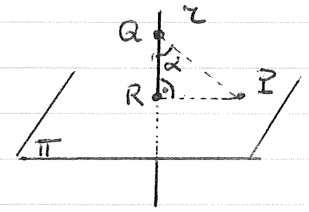
1) $d(A,B) \geq 0 \quad \forall A, B \in V.$ pues $d(A,B) = |\vec{AB}| \geq 0$
2) $d(A,B) = 0 \iff A = B$ pues $d(A,B) = |\vec{AB}| = 0$; luego $\vec{AB} = \vec{0}$ y $A = B$.
3) $d(A,B) = d(B,A)$ pues $|\vec{AB}| = |\vec{BA}|$.
4) $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$

desigualdad triangular.

Dem
$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}, \quad d(A,B) = |\vec{AB}| = |\vec{AC} + \vec{CB}| \leq |\vec{AC}| + |\vec{CB}| = d(A,C) + d(C,B)$$

Distancia entre punto y recta

Se llama distancia de un punto P a una recta r a la menor de las distancias entre los puntos P y Q donde Q es un punto arbitrario de r.



Sea π el plano perpendicular a r que pasa por P.
Sea R el punto de intersección de π y r.
Vamos a demostrar que $d(P,r) = d(P,R)$.

$$|\vec{PQ}|^2 = |\vec{PR} + \vec{RQ}|^2 = (\vec{PR} + \vec{RQ})^2 = |\vec{PR}|^2 + |\vec{RQ}|^2 + 2\,\vec{PR}.\vec{RQ} = |\vec{PR}|^2 + |\vec{RQ}| \geq |\vec{PR}|^2$$

Luego $|\vec{PQ}|^2 \geq |\vec{PR}|^2$. Tomando raíz cuadrada : $|\vec{PQ}| \geq |\vec{PR}|$

Por tanto $d(P,r) = d(P,R)$.

Expresión analítica en base ortonormal.

Sea $\vec{u}$ vector de dirección de la recta r.
De la figura anterior se deduce que $|\operatorname{sen}\alpha| = \dfrac{|\vec{PR}|}{|\vec{PQ}|}$

$$d(P,r) = d(P,R) = |\vec{PR}| = |\vec{PQ}|.|\operatorname{sen}\alpha| = \frac{|\vec{PQ}|.|\vec{u}|.|\operatorname{sen}\alpha|}{|\vec{u}|} = \frac{|\vec{PQ} \wedge \vec{u}|}{|\vec{u}|}.$$

$P(x_1, y_1, z_1)$
$Q(x_2, y_2, z_2)$
$\vec{PQ}(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$

$$d(P,r) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ u_2 & u_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2-z_1 & x_2-x_1 \\ u_3 & u_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}$$

(Nota: Si $P \in r$ entonces $d(P,r) = 0$)

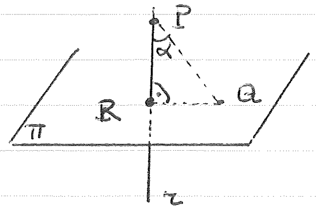
Distancia entre punto y plano.

Se llama distancia de un punto P a un plano π a la menor de las distancias entre los puntos P y Q siendo Q un punto arbitrario de π.

Sea r la recta perpendicular a π que pasa por P.

Sea R el punto de intersección de r y π.

Igual que en el caso anterior se demuestra que $|\vec{PQ}| \geq |\vec{PR}|$, con lo cual $d(P,\pi) = d(P,R)$



Expresión analítica

Sea $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ $\quad \vec{n}(A,B,C)$ vector normal.

$P(x_1, y_1, z_1)$; $Q(x_2, y_2, z_2)$. $\quad |\cos\alpha| = \dfrac{|\vec{PR}|}{|\vec{PQ}|}$

$$d(P,\pi) = |\vec{PR}| = |\vec{PQ}|.|\cos\alpha| = |\vec{PQ}|.|\cos(\widehat{\vec{PQ},\vec{n}})| = |\vec{PQ}|.\frac{|\vec{PQ}\cdot\vec{n}|}{|\vec{PQ}|.|\vec{n}|} = \frac{|\vec{PQ}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}.$$

$$d(P,\pi) = \frac{|A(x_2-x_1) + B(y_2-y_1) + C(z_2-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} =$$

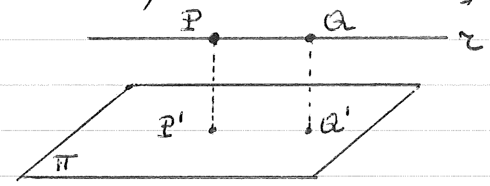
$$= \frac{|Ax_2 + By_2 + Cz_2 - Ax_1 - By_1 - Cz_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \overset{(*)}{=} \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

(*) Al ser $Q \in \pi$ se tiene que $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$. Luego $Ax_2 + By_2 + Cz_2 = -D$

Distancia entre recta y plano.

Sea r una recta y π un plano.

- Si la recta está contenida en el plano ó bien corta al plano entonces $d(r,\pi) = 0$
- Si la recta es paralela (no contenida) al plano entonces basta tomar un punto $P \in r$ cualquiera y se tendrá $d(r,\pi) = d(P,\pi)$.



Vamos a demostrar que todos los puntos de r están a la misma distancia de π, es decir, $\forall P, Q \in r$ se tiene que $d(P,\pi) = d(Q,\pi)$

De la figura se tiene:

$$|\vec{PQ'}|^2 = |\vec{PQ}|^2 + |QQ'|^2 = |\vec{PP'}|^2 + |\vec{P'Q'}|^2$$
$$|QP'|^2 = |QQ'|^2 + |Q'P'|^2 = |\vec{QP}|^2 + |\vec{PP'}|^2$$
por el teorema de Pitágoras.

sumando miembro a miembro la última igualdad se tiene:

$$\cancel{|\vec{PQ}|^2} + |QQ'|^2 + |QQ'|^2 + \cancel{|Q'P'|^2} = |\vec{PP'}|^2 + \cancel{|\vec{P'Q'}|^2} + \cancel{|\vec{QP}|^2} + |\vec{PP'}|^2$$

$$2|\vec{QQ'}|^2 = 2|\vec{PP'}|^2 \Rightarrow |\vec{QQ'}| = |\vec{PP'}|.$$

Luego $d(P,\pi) = d(Q,\pi)$

Distancia entre planos.

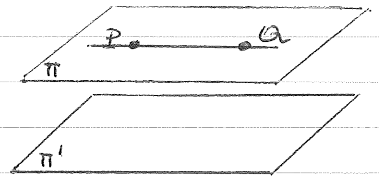
Sean π y π' dos planos.

- Si los planos se cortan ó son coincidentes entonces $d(\pi,\pi')=0$.
- Veamos qué ocurre cuando π y π' son paralelos.

En este caso sus ecuaciones serán de la forma:

$$\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0 \quad y \quad \pi' \equiv Ax+By+Cz+D'=0$$

Vamos a demostrar que todos los puntos de un plano (π) están a la misma distancia de otro. (π').



Sea $P, Q \in \pi$. Consideramos la recta que pasa por P y Q. Esta recta por estar contenida en π será paralela a π. y hemos visto que todos los puntos de esa recta están a la misma distancia de π'. (apartado anterior).

Luego $d(P,\pi')=d(Q,\pi') \quad \forall P,Q \in \pi$.

Por tanto, $d(\pi,\pi')=d(P,\pi')=\dfrac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \overset{*}{=} \dfrac{|-D+D'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\dfrac{|D'-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

$P(x_1,y_1,z_1)$

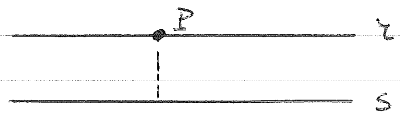
* Al ser $P\in\pi$, se tiene $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$. Luego $Ax_1+By_1+Cz_1=-D$.

Distancia entre rectas

Se llama <u>distancia entre dos rectas</u> r y s a la menor de las distancias entre P y Q donde P es un punto cualquiera de r y Q lo es de s.

- Si r y s se cortan en un punto entonces $d(r,s)=0$.
- Si r y s son paralelas basta tomar un punto $P\in r$ y calcular $d(P,s)$. Se tiene que $d(r,s)=d(P,s)$.

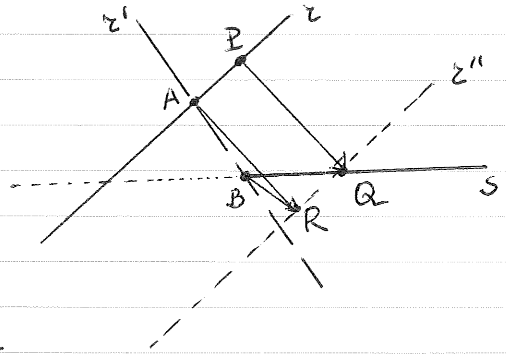
(Se demuestra como en el caso de distancia entre recta y plano que todos los puntos de una recta están a la misma distancia de la otra).



$d(r,s)=d(P,s)$; $P\in r$.

- Si las rectas r y s se cruzan, la distancia entre r y s se mide sobre la recta perpendicular común. Vamos a demostrar esto:

Sea r' la perpendicular común a r y s.
y sean A y B los puntos de intersección de r' con r y s respectivamente.
Sea r'' la recta que pasa por Q y es paralela a r.
Sea R un punto de r'' tal que $\vec{PQ}\sim\vec{AR}$.
Luego $|\vec{PQ}|=|\vec{AR}|$. Sea $\alpha=\widehat{BRA}$
En el triángulo $\overset{\triangle}{ABR}$, rectángulo en B, por ser r' perpendicular al plano que contiene a s y r'' se tiene: $\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{|\vec{AB}|}{|\vec{AR}|}$

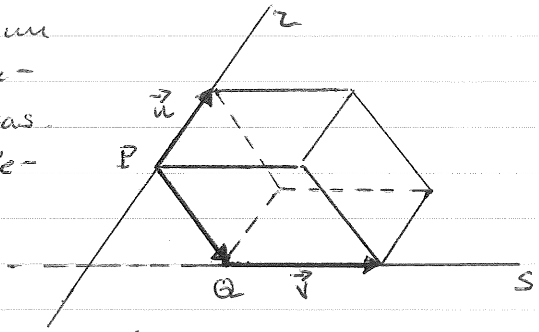


Por tanto:

$$d(A,B) = |\vec{AB}| = |\vec{AR}| . \operatorname{sen}\alpha = |\vec{PQ}| . \operatorname{sen}\alpha \leq |\vec{PQ}| = d(P,Q).$$

Tenemos pues que $d(A,B) \leq d(P,Q)$ $\forall P \in r$ $\forall Q \in s$, es decir, la distancia entre r y s se mide sobre la perpendicular común.

Veamos ahora la expresión vectorial y analítica de esta distancia.
Sea r recta que pasa por ~~por~~ P y tiene vector de dirección $\vec{u}$.
Sea s recta que pasa por Q y tiene vector de dirección $\vec{v}$.
Los vectores $\vec{PQ}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ determinan un paralelepípedo cuya altura es precisamente la distancia entre las dos rectas.
Sabemos que el volumen del paralelepípedo es $|[\vec{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]|$.
Sabemos que el área de la base es $|\vec{u} \wedge \vec{v}|$



Como el volumen es área de la base por la altura se tiene que:

$$d(r,s) = \frac{|[\vec{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \wedge \vec{v}|}$$ expresión vectorial de la distancia.

Veamos la expresión analítica:
Si $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$, $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ se tiene:

$$d(r,s) = \left| \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}^2}} \right|$$

Ecuación normal del plano.

Sea π un plano de ecuación $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ con $\vec{n}(A,B,C)$.
Sean α, β y γ los ángulos que forma el vector $\vec{n}$ con los vectores de la base ortonormal $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.
Los cosenos directores del vector $\vec{n}$ son según vimos:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad ; \quad \cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Si en la ecuación general del plano π se dividen los dos miembros por el módulo del vector $\vec{n}$ se tiene:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z + \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0$$ es decir:

$$x\cos\alpha + y.\cos\beta + z.\cos\gamma \pm d = 0$$ $\rightarrow$ ecuación normal de π

donde d es la distancia del origen al plano π.

$$d = d(O,\pi) = \frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Planos bisectores.

Se llaman planos bisectores de un diedro al lugar geométrico de todos los puntos del espacio que equidistan de las caras del diedro. Sean π y π' los planos que definen las caras del diedro, dados por sus ecuaciones normales:

$$\pi \equiv x.\cos\alpha + y.\cos\beta + z.\cos\gamma + d = 0$$
$$\pi' \equiv x\cos\alpha' + y.\cos\beta' + z.\cos\gamma' + d' = 0.$$

Si $P(x,y,z)$ pertenece al lugar geométrico se tiene que $d(P,\pi) = d(P,\pi')$, esto es, $|x\cos\alpha + y\cos\beta + z.\cos\gamma + d| = |x\cos\alpha' + y.\cos\beta' + z.\cos\gamma' + d'|$

por tanto:

$x\cos\alpha + y.\cos\beta + z.\cos\gamma + d = \pm(x\cos\alpha' + y.\cos\beta' + z.\cos\gamma' + d')$ de donde

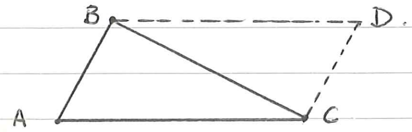
$(\cos\alpha \pm \cos\alpha')x + (\cos\beta \pm \cos\beta')y + (\cos\gamma \pm \cos\gamma')z \pm d \pm d' = 0$

que son las ecuaciones de los planos bisectores.

Se puede demostrar que los planos bisectores son perpendiculares entre sí. (comprobar que $\vec{n}.\vec{n}' = 0$ siendo $\vec{n}$ y $\vec{n}'$ los vectores normales de los planos bisectores).

Area de un triángulo.

Sean $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ y $C(x_3,y_3,z_3)$ tres puntos no alineados que determinan el triángulo de vértices A, B y C.



El triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ tiene por área la mitad del área del paralelogramo ACDB. y ésta coincide con $|\vec{AB} \wedge \vec{AC}|$.

Por tanto $\text{Area}(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{1}{2}|\vec{AB} \wedge \vec{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_2-y_1 \\ y_3-y_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2-z_1 & x_1 & y_2-y_1 \\ z_3-z_1 & x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}^2}$

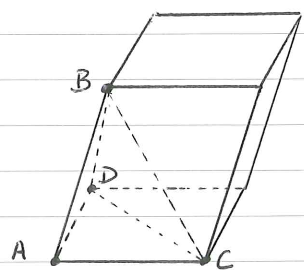
Volumen de un tetraedro

Sean $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$ y $D(x_4,y_4,z_4)$ cuatro puntos no coplanarios que definen un tetraedro de vértices A, B, C y D.

El volumen del tetraedro es la sexta parte del volumen de un paralelepípedo que tiene por aristas los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$

es decir:

$$V = \frac{1}{6}\left|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]\right|$$



la expresión analítica queda:

$$V = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}\right| =$$