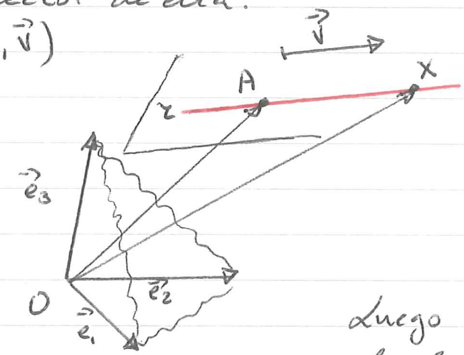
RECTA EN EL ESPACIO AFIN

1

- Una recta r en el espacio queda determinada por un punto y una dirección.

Sea $A(a_1,a_2,a_3)$ un punto de la recta r. y sea $\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$ un vector director de ella.

$r(A,\vec{v})$



Si X es un punto cualquiera de r de coordenadas $X(x,y,z)$, tenemos:

$$\vec{OA} + \vec{AX} = \vec{OX}$$
$$\vec{OA} + \lambda\vec{v} = \vec{OX}$$

Luego $\boxed{\vec{OX} = \vec{OA} + \lambda\vec{v}}$ que es la ecuación vectorial de la recta r.

Utilizando las componentes de los vectores tenemos:

$$(x,y,z) = (a_1,a_2,a_3) + \lambda(v_1,v_2,v_3)$$

esto es:

$$r \equiv \boxed{\begin{cases} x = a_1 + \lambda v_1 \\ y = a_2 + \lambda v_2 \\ z = a_3 + \lambda v_3 \end{cases}}$$ ECUACIONES PARAMETRICAS de la recta r.

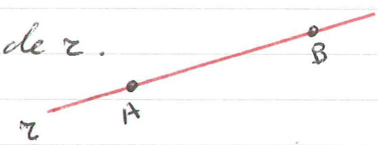
Despejando el parámetro λ de las ecuaciones paramétricas e igualando, se obtienen las ecuaciones continuas de r:

$$r \equiv \boxed{\frac{x-a_1}{v_1} = \frac{y-a_2}{v_2} = \frac{z-a_3}{v_3}}$$ EC. CONTINUA de r.

2

- Una recta en el espacio tambien queda determinada por dos puntos.

Sean $A(a_1,a_2,a_3)$ y $B(b_1,b_2,b_3)$ dos puntos de r.



Un vector director de r será $\vec{v} = \vec{AB}$

$\vec{v}(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)$

Ya tenemos la recta r con un punto (A ó B) y un vector director $\vec{v}$. con lo que aplicaremos el punto $\boxed{1}$.

Ejemplo: Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-1,3,0)$ y $B(2,3,-7)$

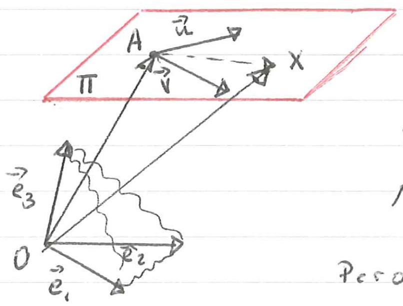
$\vec{v} = \vec{AB}(3,0,-7)$

$A(-1,3,0)$

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 3 + 0\lambda \\ z = 0 - 7\lambda \end{cases} \quad \text{es decir} \quad r \equiv \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 3 \\ z = -7\lambda. \end{cases}$$

PLANO EN EL ESPACIO AFIN

- Un plano π en el espacio queda determinado por un punto y dos direcciones. (Ver figura).



Sea $A \in \pi$ $A(a_1, a_2, a_3)$ y sean $\vec{v}(v_1 v_2 v_3)$, $\vec{u}(u_1 u_2 u_3)$ vectores de dirección del plano.

Si $X(x,y,z)$ es un punto cualquiera del plano, se observa en la figura que: $\vec{OA} + \vec{AX} = \vec{OX}$.

Pero $\vec{AX} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$. [1].

Entonces la ecuación vectorial del plano π es:

$$\boxed{\vec{OX} = \vec{OA} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}}$$

Utilizando las componentes de los vectores en la ecuación vectorial tenemos:

$$(x,y,z) = (a_1,a_2,a_3) + \lambda(u_1,u_2,u_3) + \mu(v_1,v_2,v_3) \quad \text{esto es:}$$

$$\boxed{\begin{cases} x = a_1 + \lambda u_1 + \mu v_2 \\ y = a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}}$$

ECUACIONES PARAMETRICAS DE π

En [1] tenemos: $\vec{AX} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$. es decir $\vec{AX}, \vec{u}, \vec{v}$ son linealmente dependientes. Por lo tanto:

$\vec{AX}(x-a_1, y-a_2, z-a_3)$
$\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$
$\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando este determinante obtenemos:

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}(x-a_1) + \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}(y-a_2) + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}(z-a_3) = 0$$

Agrupando y operando llegamos a una ecuación del tipo

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$$ ECUACION CARTESIANA, GENERAL Ó IMPLICITA DEL PLANO π.

Tengamos en cuenta que $A \neq 0$ ó $B \neq 0$ ó $C \neq 0$ porque $rg\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 2$ (al ser $\vec{u}, \vec{v}$ linealmente independientes), lo cual quiere decir que algún menor de orden 2 es no nulo:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}}_{C} \neq 0 \quad ó \quad \underbrace{\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}}_{-B} \neq 0 \quad ó \quad \underbrace{\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}}_{A.} \neq 0$$

Ecuación implícita de la dirección del plano.

La ecuación $Ax+By+Cz=0$ se llama ecuación implícita de la dirección del plano. La cumple cualquier vector de dirección del plano.

Ejemplo Halla dos vectores de dirección del plano $\pi \equiv x+4y-z+5=0$.

Dirección del plano $x+4y-z=0$. ; $x=-4y+z$

$$\begin{aligned} x &= -4\lambda+\mu \\ y &= \lambda \\ z &= \mu \end{aligned} \qquad (x,y,z)=(-4\lambda+\mu,\lambda,\mu)=(-4\lambda,\lambda,0)+(\mu,0,\mu)= \\ =\lambda(-4,1,0)+\mu(1,0,1)$$

luego $\vec{v}(-4,1,0)$ y $\vec{u}(1,0,1)$ son vectores directores de π.
(Observa que son l.i.).

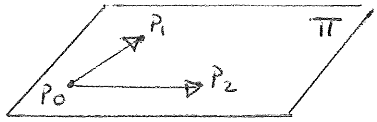
Otra forma de hacerlo sería: $x+4y-z+5=0$; $x=-5-4y+z$.

$$\pi \equiv \left.\begin{aligned} x &= -5-4\lambda+\mu \\ y &= \lambda \\ z &= \mu. \end{aligned}\right\} \text{Ecuaciones paramétricas de } \pi$$

vectores directores del plano: $\vec{v}(-4,1,0)$, $\vec{u}(1,0,1)$

Ecuaciones del plano determinado por tres puntos no alineados

Sean P_0, P_1, P_2 tres puntos no alineados.
Tomamos $\vec{u}=\overrightarrow{P_0P_1}$ y $\vec{v}=\overrightarrow{P_0P_2}$
$\vec{u},\vec{v}$ son vectores de dirección del plano π.
(observa que son linealmente independientes).



(Tres puntos no alineados determinan un plano.)

Ahora tenemos el plano π determinado por un punto, por ejemplo P_0, y por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

(Nota: Este desarrollo no depende del punto que se tome como origen de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$).

Condición para que cuatro puntos estén en un mismo plano (Coplanarios)

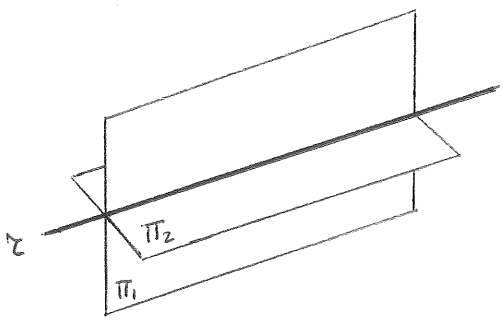
P_0, P_1, P_2, P_3 están en un mismo plano $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}$ son l.dependientes.
$P_0(x_0,y_0,z_0)$, $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$, $P_3(x_3,y_3,z_3)$.

$$P_0,P_1,P_2,P_3 \text{ coplanarios} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \\ x_3-x_0 & y_3-y_0 & z_3-z_0 \end{vmatrix}=0$$

(Ej 30)

Ecuación de la recta como intersección de dos planos.

Dos planos Π_1 y Π_2 pueden cortarse determinando una recta r, como se observa en la figura.



Sean $\Pi_1 \equiv Ax+By+Cz+D=0$
$\Pi_2 \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0$
las ecuaciones generales de los planos.
Π_1 y Π_2 determinan una recta r si $rg\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}=2$.

En efecto, si $rg\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}=2$ existe un menor de orden 2 no nulo.
Supongamos que el menor sea $\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} \neq 0$ (Análogo si fuere otro).

Tenemos $\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases} \iff \begin{cases} Ax+By=-D-Cz \\ A'x+B'y=-D'-C'z \end{cases}$ (z parámetro).
sistema que nos conduce a las ecuaciones paramétricas de una recta. (La determinada por Π_1 y Π_2)

Recíprocamente, toda recta se puede expresar como intersección de dos planos.
En efecto, sea r recta de ecuaciones: $\dfrac{x-a_1}{v_1}=\dfrac{y-a_2}{v_2}=\dfrac{z-a_3}{v_3}$.
(Supongo $v_1 \neq 0$)
Tenemos: $\begin{cases} v_2(x-a_1)=v_1(y-a_2) \\ v_3(x-a_1)=v_1(z-a_3) \end{cases} \iff \begin{cases} v_2x-v_1y=v_2a_1-v_1a_2 \\ v_3x \quad -v_1z=v_3a_1-v_1a_3 \end{cases}$

$rg\begin{pmatrix} v_2 & -v_1 & 0 \\ v_3 & 0 & -v_1 \end{pmatrix}=2$ puesto que $\begin{vmatrix} -v_1 & 0 \\ 0 & -v_1 \end{vmatrix}=v_1^2 \neq 0$.

$\downarrow$ intersección de dos planos.

Cálculo del vector director de una recta dada como intersección de dos planos.

Sea $r \equiv \begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$ con $rg\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}=2$ (Supongo $\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} \neq 0$)

La dirección de la recta vendrá dada por la intersección de las direcciones de los planos, esto es: $\begin{cases} Ax+By+Cz=0 \\ A'x+B'y+C'z=0 \end{cases}$

$\begin{cases} Ax+By=-Cz \\ A'x+B'y=-C'z \end{cases} \quad x=\dfrac{\begin{vmatrix} -Cz & B \\ -C'z & B' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}} \; ; \; y=\dfrac{\begin{vmatrix} A & -Cz \\ A' & -C'z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}} \; ; \; z=z$

Luego
$$(x,y,z) = \left(\frac{\begin{vmatrix} -C & B \\ -C' & B' \end{vmatrix} \cdot z}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} A & -C \\ A' & -C' \end{vmatrix} \cdot z}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}, z \right)$$

multiplicando por $\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}$ obtenemos un vector de la misma dirección:

$$\left(\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix} z, \begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix} z, \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} z \right) = z \left(\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} \right).$$

Un vector director de la recta r será $\vec{v}\left(\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} \right)$

Ejemplo

Halla un vector de dirección de la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + 3y - z - 9 = 0 \\ -x + 2y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$

$$\vec{v}\left(\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (11, -5, 7).$$ También: $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 11i - 5j + 7k$

porque $\vec{v}$ es perpendicular a los normales de cada plano.

INCIDENCIA. PARALELISMO. INTERSECCION.

Definición

- Se dice que un punto P es incidente con la recta r, ó bien que la recta r pasa por P, cuando P pertenece a r, o sea, $P \in r$.

Teorema

P es incidente con la recta $r \iff$ Los coordenadas de P satisfacen las ecuaciones de r.

Definición

- Se dice que un punto P es incidente con el plano π, ó bien que el plano π pasa por P, cuando P pertenece a dicho plano.

Teorema

P es incidente con el plano $\pi \iff$ Las coordenadas de P satisfacen la ecuación del plano π.

Radiación de rectas de base un punto

- Se llama radiación de rectas de base el punto P al conjunto de todas las rectas que pasan por P.

$P(x_0, y_0, z_0)$. La ecuación de la radiación es: $\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$ $\forall (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$.

Radiación de planos de base un punto

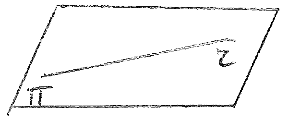
- Se llama radiación de planos de base el punto P, al conjunto

de todos los planos que pasan por P.
Si $P(x_0, y_0, z_0)$, la ecuación de la radiación de planos será:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad \forall (A,B,C)\in \mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}.$$

Definición

- Se dice que la recta r es incidente con el plano π, cuando la recta está contenida en el plano.



Haz de planos de base una recta r.

- Se llama haz de planos de base la recta r, al conjunto de todos los planos que contienen a la recta r

Si la recta viene dada por $r \equiv \begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$

la ecuación del haz viene dada por la igualdad:

$$\alpha(Ax+By+Cz+D)+\beta(A'x+B'y+C'z+D')=0. \qquad \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}.$$

ya que todo punto $P\in r$ satisface la ecuación del haz.

Otra expresión del haz de planos:
Si $\alpha\neq 0$ la expresión anterior se puede escribir de la forma siguiente: $Ax+By+Cz+D+\lambda(A'x+B'y+C'z+D')=0$ con $\lambda=\beta/\alpha$.

Para $\lambda=0$ tenemos $Ax+By+Cz+D=0$
Para $\alpha=0$ $(\lambda=\infty)$ tenemos $A'x+B'y+C'z+D'=0$.

PARALELISMO

Paralelismo entre rectas

Dos rectas son paralelas cuando tienen la misma dirección.

Teorema

Sean r y s dos rectas. $r(A,\vec{u})$, $s(B,\vec{v})$.
r y s son paralelas $\Longleftrightarrow$ $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes.
(Esto es: $rg(\vec{u},\vec{v})=1$).

Paralelismo entre planos

Dos planos π y π' son paralelos cuando sus espacios de dirección coinciden.

Teorema

- Sean $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ y $\pi' \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0$ dos planos dados por sus ecuaciones implícitas. 8)

π y π' son paralelos $\Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$

Demostración.

π y π' paralelos $\Leftrightarrow$ π y π' tienen el mismo espacio director $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Ax+By+Cz=0 \\ A'x+B'y+C'z=0 \end{array} \right.$ y $rg\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow (A,B,C) = \lambda(A',B',C') \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$.

POSICION RELATIVA DE DOS PLANOS

Las distintas posiciones que pueden adoptar dos planos en el espacio se reducen analíticamente al estudio de las soluciones del sistema S compuesto por las ecuaciones de los planos.

Sean $\left. \begin{array}{l} \pi \equiv Ax+By+Cz+D=0 \\ \pi' \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{array} \right\}$ las ecuaciones de los planos. Formamos el sistema correspondiente.

$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$; $N = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$. Aplicamos Rouché-Fröbenius:

$\boxed{1}$ $\boxed{rg M = 2 = rg N}$; S.C.I Los planos π y π' se cortan en una recta. (Ver recta como intersección de planos).

$\boxed{2}$ $\boxed{rg M = 1 ; rg N = 2}$. S.I. Los planos son paralelos y distintos.

$\boxed{3}$ $\boxed{rg M = 1 = rg N}$ S.C.I. Los planos son coincidentes. $(\pi \equiv \pi')$. (filas de N proporcionales).

POSICION RELATIVA DE RECTA Y PLANO

$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{array} \right.$ con $rg\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = 2$

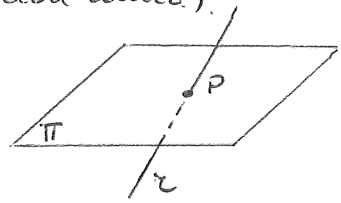
$\pi \equiv A''x+B''y+C''z+D''=0$.

Estudiamos las soluciones del sistema formado por estas ecuaciones:

$\left\{ \begin{array}{l} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \\ A''x+B''y+C''z+D''=0 \end{array} \right.$ $M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix}$; $N = \begin{pmatrix} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \\ A'' & B'' & C'' & -D'' \end{pmatrix}$.

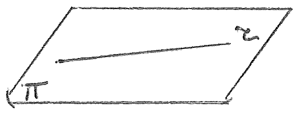
Se pueden presentar los siguientes casos:
(Observa que $rg M \geq 2$).

[1] $\boxed{rg\,M = 3 = rg\,N}$. S.C.D. (El sistema tiene solución única).



La recta y el plano se cortan en un punto P

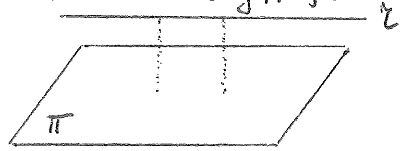
[2] $\boxed{rg\,M = 2 = rg\,N}$. S.C.I (La recta y el plano tienen infinitos puntos comunes).



La recta está contenida en el plano.
Sistema equivalente:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$ que son las ecuaciones de r.

[3] $\boxed{rg\,M = 2\ ;\ rg\,N = 3}$. S.I (no hay puntos comunes entre r y π).
La recta es paralela al plano



POSICION RELATIVA DE DOS RECTAS

$$r \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases} ;\ rg\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = 2$$

$$s \equiv \begin{cases} Px + Qy + Rz + S = 0 \\ P'x + Q'y + R'z + S' = 0 \end{cases} ;\ rg\begin{pmatrix} P & Q & R \\ P' & Q' & R' \end{pmatrix} = 2.$$

Formamos el sistema con las cuatro ecuaciones
$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ Px + Qy + Rz + S = 0 \\ P'x + Q'y + R'z + S' = 0 \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ P & Q & R \\ P' & Q' & R' \end{pmatrix} ;\ N = \begin{pmatrix} A & B & C & -D \\ A' & B' & C' & -D' \\ P & Q & R & -S \\ P' & Q' & R' & -S' \end{pmatrix}$$

[1] $\boxed{\begin{matrix} rg\,M = 2 \\ rg\,N = 2 \end{matrix}}$ Sistema equivalente $\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$
S.C.I.
Las rectas son coincidentes ($r \equiv s$).

[2] $\boxed{rg\,M = 2 \neq rg\,N}$ S.I. Rectas paralelas y distintas.
Al ser rg M = 2 las filas 3 y 4 de M son combinación lineal de las dos primeras. Por lo tanto la dirección de s es la misma que la de r.

[3] $\boxed{rg\,M = 3 = rg\,N}$. S.C.D. Las rectas se cortan en un punto.

[4] $\boxed{rg\,M = 3\ ;\ rg\,N = 4}$. S.I Las rectas se cruzan.

• Vamos a estudiar ahora la posición relativa de dos rectas r y s cuando éstas vienen dadas por sus ecuaciones paramétricas o continuas.
En ambos casos conocer un punto de cada una de ellas y un vector de dirección es inmediato.

Sea $A(a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{u}\,(u_1, u_2, u_3)$ un punto y un vector director de r.
Sea $B(b_1, b_2, b_3)$ y $\vec{v}\,(v_1, v_2, v_3)$ un punto y un vector director de s.

$\boxed{1}$ $\boxed{rg(\vec{u}, \vec{v}) = 1}$. En este caso $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente dependientes. Por tanto las rectas son paralelas.

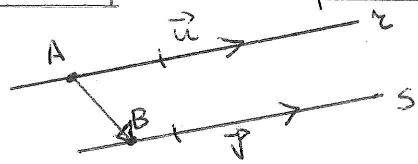
Distinguimos dos casos:

a) $\boxed{rg(\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}) = 1}$. Rectas paralelas y coincidentes. $(r \equiv s)$

$\{\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}\}$. L.D.

b) $\boxed{rg(\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}) = 2}$ Rectas paralelas y distintas.

$\{\vec{AB}, \vec{u}\}$ L.I.



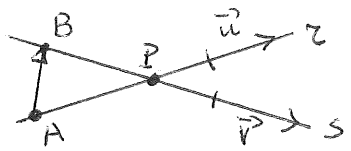
(LD ≡ linealmente dependientes)
(L.I ≡ linealmente independientes).

$\boxed{2}$ $\boxed{rg\{\vec{u}, \vec{v}\} = 2}$. Rectas no paralelas (se cortan o se cruzan).

Distinguimos dos casos:

a) $\boxed{rg\{\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}\} = 2}$. Las rectas se cortan en un punto. P

$\{\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}\}$ L.D.



b) $\boxed{rg\{\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}\} = 3}$ Las rectas se cruzan.