

Tema 10: Cálculo integral

1. Introducción

El matemático inglés Isaac Barrow (1630-1677) fue el precursor del cálculo de integrales definidas, enunciando la regla que lleva su nombre y que conecta la integral definida con la indefinida y, por tanto, con las derivadas.

En esta unidad veremos el cálculo de primitivas elementales y trataremos su aplicación al cálculo de áreas de recintos planos limitados por curvas.

2. Integral de una función

2.1 Primitiva de una función

Sea $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real.

Diremos que la función $F(x)$ es una **primitiva** de $f(x)$ si se cumple que $F'(x) = f(x)$

$$F \text{ primitiva de } f \equiv F' = f$$

Así, por ejemplo, $F(x) = x^2$ es una primitiva de la función $f(x) = 2x$ puesto que $F'(x) = f(x)$. Observemos que basta sumar una constante a la función $F(x)$ para obtener otra primitiva de $f(x)$; la función $G(x) = x^2 + 1$ también es primitiva de $f(x) = 2x$.

$$F = x^2 \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Derivada}} \\ \xleftrightarrow{\text{Primitiva}} \end{array} f = 2x$$

F es primitiva de f equivale a f es derivada de F

Proposición

$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ función real de variable real $\left. \begin{array}{l} F(x) \text{ primitiva de } f \\ y \quad c \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow F(x) + c$ es primitiva de f

Demostración

$F(x)$ primitiva de $f \Rightarrow F'(x) = f$; $(F(x) + c)' = F'(x) = f$

Por tanto, más que la primitiva de una función $f(x)$ existen sus primitivas y a ese conjunto lo vamos a llamar integral indefinida de la función $f(x)$.

2.2 Integral indefinida

Sea $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real.

Se llama **integral** de la función f y lo escribimos $\int f(x)dx$ al conjunto de todas sus primitivas:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Siendo $F(x)$ una primitiva de $f(x)$ y c una constante.

Ejemplo 1

Calculemos una primitiva de las siguientes funciones y después su integral:

a) $f(x) = 3x$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Resolución

a) Una primitiva de $f(x) = 3x$ es $F(x) = \frac{3}{2}x^2$ porque $F'(x) = \frac{3}{2} \cdot 2x = 3x = f(x)$

$$\int 3x \, dx = \frac{3}{2}x^2 + c$$

b) Una primitiva de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ es $F(x) = 2\sqrt{x}$ porque $F'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = f(x)$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = 2\sqrt{x} + c$$

Para facilitar la tarea de encontrar primitivas de funciones, vamos a dar una lista o tabla de integrales que llamamos inmediatas en el sentido de que podemos calcularlas sin necesidad de acudir a transformación alguna. Antes, vamos a dar dos propiedades fundamentales en cuanto a operaciones.

3. Operaciones

Operación	Integral
01. $k \in \mathbb{R}$; Producto de constante por función	$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$
02. Suma y resta de funciones	$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

4. Integrales inmediatas

4.1 Funciones elementales simples

Función	Integral
P1. Función unidad: $f(x) = 1$	$\int dx = x + c$
P2. Función constante: $k \in \mathbb{R}$; $f(x) = k$	$\int k dx = kx + c$
P3. Función potencial: $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$; $f(x) = x^\alpha$	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
P4. $f(x) = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = L x + c$
P5. Función inversa raíz cuadrada: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + c$
P6. Función exponencial: $a \in \mathbb{R}$; $a > 0$; $a \neq 1$ $f(x) = a^x$ $f(x) = e^x$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{La} + c$ $\int e^x dx = e^x + c$
P7. Función trigonométrica: $f(x) = \text{sen } x$ $f(x) = \text{cos } x$ $f(x) = \frac{1}{\text{cos}^2 x} = \text{sec}^2 x = 1 + \text{tg}^2 x$	$\int \text{sen } x dx = -\text{cos } x + c$ $\int \text{cos } x dx = \text{sen } x + c$ $\int \frac{1}{\text{cos}^2 x} dx = \text{tg } x + c$

Ejemplo 2

Calculemos las integrales siguientes:

$$a) \int (2x^2 + 3) dx \stackrel{02}{=} \int 2x^2 dx + \int 3 dx \stackrel{01}{=} 2 \int x^2 dx + \int 3 dx \stackrel{P2,P3}{=} \frac{2x^3}{3} + 3x + c$$

$$b) \int \left(1 + x - \frac{3}{\sqrt{x}}\right) dx \stackrel{02}{=} \int dx + \int x dx - \int \frac{3}{\sqrt{x}} dx \stackrel{P1,P2,01,P5}{=} x + \frac{x^2}{2} - 6\sqrt{x} + c$$

$$c) \int \frac{3x^4 - 2x + 1}{x} dx = \int \left(3x^3 - 2 + \frac{1}{x}\right) dx \stackrel{02}{=} \int 3x^3 dx - \int 2 dx + \int \frac{1}{x} dx \stackrel{01}{=} \\ = 3 \int x^3 dx - 2 \int dx + \int \frac{1}{x} dx \stackrel{P3,P1,P4}{=} \frac{3x^4}{4} - 2x + L|x| + c$$

$$d) \int \left(\frac{e^x}{4} + \text{sen } x\right) dx \stackrel{02}{=} \int \frac{e^x}{4} dx + \int \text{sen } x dx \stackrel{01,P7}{=} \frac{1}{4} \int e^x dx - \text{cos } x \stackrel{P6}{=} \frac{1}{4} \cdot e^x - \text{cos } x + c$$

$$e) \int \frac{2+4x}{x^2} dx = \int \left(2x^{-2} + \frac{4}{x}\right) dx \stackrel{O1,O2}{\cong} 2 \int x^{-2} dx + 4 \int \frac{1}{x} dx \stackrel{P3,P4}{\cong} -\frac{2}{x} + 4L|x| + c$$

Ejemplo 3

Calcula la primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = \frac{1-2x}{\sqrt{x}}$ tal que $F(4) = 1$

Resolución

La primitiva que buscamos estará en el conjunto

$$F(x) = \int \frac{1-2x}{\sqrt{x}} dx \stackrel{O2}{\cong} \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx - 2 \int x^{1/2} dx \stackrel{P5,P3}{\cong} 2\sqrt{x} - 2 \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = 2\sqrt{x} - \frac{4}{3}x\sqrt{x} + c$$

$$F(4) = 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{4} - \frac{4}{3} \cdot 4 \cdot \sqrt{4} + c = 1 \Leftrightarrow 4 - \frac{32}{3} + c = 1 \Leftrightarrow c = 1 - 4 + \frac{32}{3} = \frac{23}{3}$$

La primitiva que buscamos es

$$F(x) = 2\sqrt{x} - \frac{4}{3}x\sqrt{x} + \frac{23}{3}$$

4.2 Funciones elementales compuestas

Función	Integral
C1. $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$; Potencial $g(x) = [f(x)]^\alpha \cdot f'(x)$	$\int [f(x)]^\alpha \cdot f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
C2. $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$	$\int \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) dx = L f(x) + c$
C3. $g(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x) dx = 2 \cdot \sqrt{f(x)} + c$
C4. Funciones exponenciales: $a \in \mathbb{R}; a > 0; a \neq 1$	$\int a^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{La} + c$ $\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + c$
C5. Funciones trigonométricas:	$\int \text{sen } f(x) \cdot f'(x) dx = -\text{cos } f(x) + c$ $\int \text{cos } f(x) \cdot f'(x) dx = \text{sen } f(x) + c$ $\int \frac{1}{\text{cos}^2 f(x)} \cdot f'(x) dx = \text{tg } f(x) + c$ $\int (1 + \text{tg}^2 f(x)) \cdot f'(x) dx = \text{tg } f(x) + c$

Ejemplo 4

Calculamos las integrales siguientes:

$$a) \int (x+1)^4 dx \stackrel{C1}{\cong} \frac{(x+1)^5}{5} + c$$

$$b) \int (2x+1)^4 dx \stackrel{O1}{\cong} \frac{1}{2} \int (2x+1)^4 \cdot 2 dx \stackrel{C1}{\cong} \frac{(x+1)^5}{10} + c$$

$$c) \int \frac{x}{x^2-3} dx \stackrel{O1}{\cong} \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2-3} dx \stackrel{C2}{\cong} \frac{1}{2} \cdot L|x^2-3| + c$$

$$d) \int \left(\frac{2}{\sqrt{3x}} - 1 \right) dx \stackrel{O2}{\cong} \int \frac{2}{\sqrt{3x}} dx - \int dx \stackrel{O1, C3, P1}{\cong} \frac{4}{3} \sqrt{3x} - x + c$$

$$e) \int \frac{e^{2x} - x}{3} dx \stackrel{O1, O2}{\cong} \frac{1}{3} \cdot \left[\int e^{2x} dx - \int x dx \right] \stackrel{O1}{\cong} \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \int e^{2x} \cdot 2 dx - \int x dx \right] \stackrel{C4, P3}{\cong} \frac{e^{2x}}{6} - \frac{x^2}{6} + c$$

$$f) \int 2 \cos(3x) dx \stackrel{O1}{\cong} \frac{2}{3} \int \cos(3x) \cdot 3 dx \stackrel{C5}{\cong} \frac{2}{3} \operatorname{sen}(3x) + c$$

5. Integración de funciones racionales

Las funciones racionales son de la forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y están definidas siempre que $Q(x) \neq 0$.

Las integrales racionales son del tipo:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

Supondremos que el grado del numerador es menor que el grado del denominador pues en caso contrario, haciendo la división entera, se tiene:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \quad Q(x) \neq 0$$

y el problema se reduciría a integrar la función polinómica $C(x)$, que es inmediata, y la función $\frac{R(x)}{Q(x)}$, cuyo numerador es de grado inferior al denominador:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int C(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

Por tanto, a partir de ahora, suponemos $\operatorname{grado}(P(x)) < \operatorname{grado}(Q(x))$.

En primer lugar tenemos que hallar las raíces del polinomio $Q(x)$. Según que éstas sean simples, de multiplicidad k o complejas se procede de forma distinta. Aquí solo analizaremos los dos primeros supuestos.

5.1 Solo raíces reales simples en $Q(x)$

Sean x_1, x_2, \dots, x_k las raíces reales simples del polinomio $Q(x)$.

Descomponemos el integrando $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en una suma de fracciones, que tengan por denominador polinomios de primer grado $(x - x_i)$ con $i = 1, 2, \dots, k$ de la forma siguiente:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \dots + \frac{A_k}{x - x_k}$$

y determinamos los valores A_1, A_2, \dots, A_k . Después bastará hacer

$$\begin{aligned} \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx &= \int \frac{A_1}{x - x_1} dx + \int \frac{A_2}{x - x_2} dx + \dots + \int \frac{A_k}{x - x_k} dx = \\ &= A_1 \cdot L|x - x_1| + A_2 \cdot L|x - x_2| + \dots + A_k \cdot L|x - x_k| + c \end{aligned}$$

Ejemplo 5

Calcula la integral racional

$$I = \int \frac{x^3}{x^2 + 3x - 4} dx$$

Resolución

Como el grado del polinomio numerador no es menor que el grado del polinomio denominador, efectuamos la división $x^3 \div x^2 + 3x - 4$ obteniendo como cociente el polinomio $C(x) = x - 3$ y como resto el polinomio $R(x) = 13x - 12$

Así:

$$I = \int \frac{x^3}{x^2 + 3x - 4} dx = \int (x - 3) dx + \int \frac{13x - 12}{x^2 + 3x - 4} dx = I_1 + I_2$$

La integral I_1 es inmediata:

$$I_1 = \int (x - 3) dx = \frac{(x - 3)^2}{2} + c_1$$

La integral I_2 es racional pero ahora el grado del numerador es menor que el grado del denominador por lo que procedemos como hemos indicado anteriormente.

Calculamos las raíces del polinomio $x^2 + 3x - 4$.

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -4 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = (x - 1) \cdot (x + 4)$$

Escribimos el integrando de la forma siguiente

$$\frac{13x - 12}{x^2 + 3x - 4} = \frac{13x - 12}{(x - 1) \cdot (x + 4)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 4} = \frac{A \cdot (x + 4) + B \cdot (x - 1)}{(x - 1) \cdot (x + 4)}$$

por lo cual

$$13x - 12 = A \cdot (x + 4) + B \cdot (x - 1)$$

y sustituyendo $x = 1$ y $x = -4$ obtenemos $\begin{cases} 1 = 5A \\ -64 = -5B \end{cases}$ de donde $A = 1/5$ y $B = 64/5$

Por tanto:

$$I_2 = \int \frac{13x - 12}{x^2 + 3x - 4} dx = \int \frac{1/5}{x - 1} dx + \int \frac{64/5}{x + 4} dx = \frac{1}{5} L|x - 1| + \frac{64}{5} L|x + 4| + c_2$$

La integral $I = I_1 + I_2$ queda:

$$I = \int \frac{x^3}{x^2 + 3x - 4} dx = \frac{(x - 3)^2}{2} + \frac{1}{5} L|x - 1| + \frac{64}{5} L|x + 4| + c$$

5.2 Solo raíces reales simples y de multiplicidad r en $Q(x)$

Para cada raíz simple procedemos como en el apartado anterior y para cada raíz x_p de multiplicidad r consideramos, en la descomposición del integrando, los sumandos

$$\frac{A_p}{(x - x_p)^r} + \frac{A_{p-1}}{(x - x_p)^{r-1}} + \dots + \frac{A_2}{(x - x_p)^2} + \frac{A_1}{x - x_p}$$

Ejemplo 6

Calcula la integral racional

$$I = \int \frac{2x - 1}{(x - 1) \cdot (x + 2)^2} dx$$

Resolución

Las raíces del polinomio denominador son $x = 1$ y $x = -2$ (doble).

Descomponemos el integrando en suma de fracciones:

$$\frac{2x - 1}{(x - 1) \cdot (x + 2)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x + 2)^2} + \frac{C}{x + 2} = \frac{A(x + 2)^2 + B(x - 1) + C(x - 1) \cdot (x + 2)}{(x - 1) \cdot (x + 2)^2}$$

y así

$$2x - 1 = A(x + 2)^2 + B(x - 1) + C(x - 1) \cdot (x + 2)$$

Sustituyendo en la igualdad de polinomios los valores $x = 1$, $x = -2$ y $x = 0$ tenemos

$$\begin{cases} 1 = 9A \\ -5 = -3B \\ -1 = 4A - B - 2C \end{cases} \quad \text{de donde } A = \frac{1}{9}; B = \frac{5}{3}; C = -\frac{1}{9}$$

$$I = \int \frac{2x-1}{(x-1) \cdot (x+2)^2} dx = \frac{1}{9} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{5}{3} \int \frac{1}{(x+2)^2} dx - \frac{1}{9} \int \frac{1}{x+2} dx$$

La segunda integral es $\int \frac{1}{(x+2)^2} dx = \int (x+2)^{-2} dx \stackrel{C3}{=} \frac{(x+2)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x+2} + c_1$

Por tanto

$$I = \int \frac{2x-1}{(x-1) \cdot (x+2)^2} dx = \frac{1}{9} L|x-1| - \frac{5}{3(x+2)} - \frac{1}{9} L|x+2| + c$$

6. Integración por partes

El método de integración por partes se basa en la derivada de un producto de funciones. A partir de él se obtiene una regla que permite calcular la integración de un producto de dos funciones.

Sean u y v dos funciones reales de variable real. La derivada de su producto es

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

o empleando notación diferencial

$$d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$$

de donde

$$u \cdot dv = d(u \cdot v) - du \cdot v$$

e integrando ambos miembros obtenemos la regla que buscamos:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Conocida como regla de integración por partes que permite resolver integrales identificando el integrando con $\int u \cdot dv$.

Ejemplo 7

Calcula la integral

$$I = \int x \cdot e^x dx$$

Resolución

El integrando es un producto de funciones en el que las reglas de integración inmediatas no se pueden aplicar. Utilizamos el método de integración por partes:

Identificamos

$$\int x \cdot e^x dx \text{ con } \int u \cdot dv \Leftrightarrow \begin{matrix} u = x \\ dv = e^x dx \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} du = dx \\ v = \int dv = \int e^x dx = e^x \end{matrix}$$

Así, aplicando la fórmula de integración por partes, obtenemos la integral

$$I = \int x \cdot e^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c = e^x(x-1) + c$$

Ejemplo 8

Calcula la integral

$$I = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx$$

Resolución

El integrando es un producto de funciones en el que las reglas de integración inmediatas no se pueden aplicar. Utilizamos el método de integración por partes:

Identificamos

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx \text{ con } \int u \cdot dv \Leftrightarrow \begin{matrix} u = x \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} du = dx \\ v = \int dv = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \end{matrix}$$

$$I = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \cdot \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx$$

y como $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = - \int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = L|\cos x| + c$ tenemos que

$$I = \int \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \cdot \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx = x \cdot \operatorname{tg} x + L| + c$$
