Tema 9: Cálculo integral

1. Introducción

El matemático inglés Isaac Barrow (1630-1677) fue el precursor del cálculo de integrales definidas, enunciando la regla que lleva su nombre y que conecta la integral definida con la indefinida y, por tanto, con las derivadas.
En esta unidad veremos el cálculo de primitivas elementales y trataremos su aplicación al cálculo de áreas de recintos planos limitados por curvas.

2. Integral de una función

2.1 Primitiva de una función

Sea $f: (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real.
Diremos que la función $F(x)$ es una **primitiva** de $f(x)$ si se cumple que $F'(x) = f(x)$

$$\boldsymbol{F\ primitiva\ de\ f \equiv F' = f}$$

Así, por ejemplo, $F(x) = x^2$ es una primitiva de la función $f(x) = 2x$ puesto que $F'(x) = f(x)$.
Observemos que basta sumar una constante a la función $F(x)$ para obtener otra primitiva de $f(x)$; la función $G(x) = x^2 + 1$ también es primitiva de $f(x) = 2x$.

$$F = x^2 \quad \underset{\underbrace{\longleftarrow\longleftarrow}_{Primitiva}}{\overset{Derivada}{\overbrace{\longrightarrow\longrightarrow}}} \quad f = 2x$$

F es primitiva de f equivale a f es derivada de F

Proposición

$$\left.\begin{array}{l} f: (a, b) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ función real de variable real} \\ \quad F(x) \text{ primitiva de } f \quad \text{y} \quad c \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Longrightarrow F(x) + c \ \text{ es primitiva de } f$$

Demostración

$F(x)$ primitiva de $f \Longrightarrow F'(x) = f$; $(F(x) + c\ )' = F'(x) = f$

Por tanto, más que la primitiva de una función $f(x)$ existen sus primitivas y a ese conjunto lo vamos a llamar integral indefinida de la función $f(x)$.

2.2 Integral indefinida

Sea $f: (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real.
Se llama **integral** de la función f y lo escribimos $\int f(x)dx$ al conjunto de todas sus primitivas:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Siendo $F(x)$ una primitiva de $f(\text{x})$ y c una constante.

Ejemplo 1

Calculemos una primitiva de las siguientes funciones y después su integral:

a) $f(x) = 3x$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Resolución

a) Una primitiva de $f(x) = 3x$ es $F(x) = \frac{3}{2}x^2$ porque $F'(x) = \frac{3}{2} \cdot 2x = 3x = f(x)$

$$\int 3x\ dx = \frac{3}{2}x^2 + c$$

b) Una primitiva de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ es $F(x) = 2\sqrt{x}$ porque $F'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = f(x)$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx = 2\sqrt{x} + c$$

Para facilitar la tarea de encontrar primitivas de funciones, vamos a dar una lista o tabla de integrales que llamamos inmediatas en el sentido de que podemos calcularlas sin necesidad de acudir a transformación alguna. Antes, vamos a dar dos propiedades fundamentales en cuanto a operaciones.

3. Operaciones

Operación	Integral
O1. $k \in R$; **Producto de constante por función**	$\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$
O2. Suma y resta de funciones	$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

4. Integrales inmediatas

4.1 Funciones elementales simples

Función	Integral
P1. Función unidad: $f(x) = 1$	$\int dx = x + c$
P2. Función constante: $k \in \mathbb{R}\,; f(x) = k$	$\int k\,dx = kx + c$
P3. Función potencial: $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}\,;\ f(x) = x^\alpha$	$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
P4. $f(x) = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\,dx = L\lvert x\rvert + c$
P5. Función inversa raíz cuadrada: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + c$
P6. Función exponencial: $a \in \mathbb{R}\,; a > 0\,; a \neq 1$ $f(x) = a^x$ $f(x) = e^x$	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{La} + c$ $\int e^x\,dx = e^x + c$
P7. Función trigonométrica: $f(x) = sen\,x$ $f(x) = \cos x$ $f(x) = \frac{1}{cos^2 x} = sec^2 x = 1 + tg^2 x$	$\int sen\,x\,dx = -cos\,x + c$ $\int cos\,x\,dx = sen\,x + c$ $\int \frac{1}{cos^2 x}\,dx = tg\,x + c$
P8. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = arcsenx + c$
P9. $f(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = arccosx + c$
P.10 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = arctgx + c$

Ejemplo 2

Calculemos las integrales siguientes:

$$a)\ \int (2x^2 + 3)\,dx \overset{O2}{\triangleq} \int 2x^2\,dx + \int 3\,dx \overset{O1}{\triangleq} 2\int x^2\,dx + \int 3\,dx \overset{P2,P3}{\triangleq} \frac{2x^3}{3} + 3x + c$$

$$b)\ \int \left(1 + x - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx \overset{O2}{\triangleq} \int dx + \int x\,dx - \int \frac{3}{\sqrt{x}}\,dx \overset{P1,P2,O1,P5}{\triangleq} x + \frac{x^2}{2} - 6\sqrt{x} + c$$

$$c)\ \int \frac{3x^4-2x+1}{x}\,dx = \int \left(3x^3-2+\frac{1}{x}\right)dx \overset{O2}{\triangleq} \int 3x^3\,dx - \int 2\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx \overset{O1,}{\triangleq}$$

$$= 3\int x^3\,d\,x - 2\int dx + \int \frac{1}{x}\,dx \overset{P3,P1,P4}{\triangleq} \frac{3x^4}{4} - 2x + L|x| + c$$

$$d)\ \int \left(\frac{e^x}{4}+senx\right)dx \overset{O2}{\triangleq} \int \frac{e^x}{4}\,dx + \int senx\ dx \overset{O1,P7}{\triangleq} \frac{1}{4}\int e^x\,dx - cosx \overset{P6}{\triangleq} \frac{1}{4}\cdot e^x - cosx + c$$

$$e)\ \int \frac{2+4x}{x^2}\,dx = \int \left(2x^{-2}+\frac{4}{x}\right)dx \overset{O1,O2}{\triangleq} 2\int x^{-2}\,dx + 4\int \frac{1}{x}\,dx \overset{P3,P4}{\triangleq} -\frac{2}{x} + 4L|x| + c$$

Ejemplo 3

Calcula la primitiva $F(x)$ de la función $f(x)=\frac{1-2x}{\sqrt{x}}$ tal que $F(4)=1$

Resolución

La primitiva que buscamos estará en el conjunto

$$\int \frac{1-2x}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$F(x)=\int \frac{1-2x}{\sqrt{x}}\,dx \overset{O2}{\triangleq} \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx - 2\int x^{1/2}\,dx \overset{P5,P3}{\triangleq} 2\sqrt{x} - 2\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = 2\sqrt{x} - \frac{4}{3}x\sqrt{x} + c$$

$$F(4)=1 \Leftrightarrow 2\sqrt{4} - \frac{4}{3}\cdot 4\cdot\sqrt{4} + c = 1 \Leftrightarrow 4 - \frac{32}{3} + c = 1 \Leftrightarrow c = 1 - 4 + \frac{32}{3} = \frac{23}{3}$$

La primitiva que buscamos es $F(x)=2\sqrt{x}-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+\frac{23}{3}$

4.2 Funciones elementales compuestas

Función	Integral
C1. $\boldsymbol{\alpha \in \mathbb{R}-\{-1\}}$ **; Potencial** $\boldsymbol{g(x)=[f(x)]^\alpha\cdot f'(x)}$	$\boldsymbol{\int [f(x)]^\alpha\cdot f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c}$
C2. $\boldsymbol{g(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}}$	$\boldsymbol{\int \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)dx = L\lvert f(x)\rvert + c}$
C3. $\boldsymbol{g(x)=\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}}$	$\boldsymbol{\int \frac{1}{\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x)\,dx = 2\cdot\sqrt{f(x)}+c}$
C4. Funciones exponenciales: $\boldsymbol{a\in\mathbb{R}\,;a>0\,;a\neq 1}$	$\boldsymbol{\int a^{f(x)}\cdot f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{La}+c}$ $\boldsymbol{\int e^{f(x)}\cdot f'(x)\,dx = e^{f(x)}+c}$
C5. Funciones trigonométricas:	$\boldsymbol{\int sen\,f(x)\cdot f'(x)\,dx = -cos\,f(x)\ +c}$ $\boldsymbol{\int cos\,f(x)\cdot f'(x)\,dx = sen\,f(x)+c}$ $\boldsymbol{\int \frac{1}{cos^2 f(x)}\cdot f'(x)\,dx = tg\,f(x)+c}$ $\boldsymbol{\int (1+tg^2 f(x))\cdot f'(x)\,dx = tg\,f(x)+c}$
C6. $\boldsymbol{g(x)=\frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}}$	$\boldsymbol{\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\,dx = arcsen(f(x))\ +c}$
C7. $\boldsymbol{g(x)=\frac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}}$	$\boldsymbol{\int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\,dx = arccos(f(x))\ +c}$
C8. $\boldsymbol{g(x)=\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}}$	$\boldsymbol{\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\,dx = arctg(f(x))\ +c}$

Ejemplo 4

Calculemos las integrales siguientes:

a) $\int (x+1)^4\, dx \overset{C1}{\cong} \frac{(x+1)^5}{5} + c$

b) $\int (2x+1)^4\, dx \overset{O1}{\cong} \frac{1}{2}\int (2x+1)^4 \cdot 2\, dx \overset{C1}{\cong} \frac{(x+1)^5}{10} + c$

c) $\int \frac{x}{x^2-3}\, dx \overset{O1}{\cong} \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-3}\, dx \overset{C2}{\cong} \frac{1}{2} \cdot L|x^2-3| + c$

d) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{3x}} - 1\right) dx \overset{O2}{\cong} \int \frac{2}{\sqrt{3x}} dx - \int dx \overset{O1,C3,P1}{\cong} \frac{4}{3}\sqrt{3x} - x + c$

e) $\int \frac{e^{2x}-x}{3}\, dx \overset{O1,O2}{\cong} \frac{1}{3} \cdot \left[\int e^{2x}\, dx - \int x\ dx\right] \overset{O1}{\cong} \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\int e^{2x} \cdot 2\, dx - \int x\ dx\right] \overset{C4,P3}{\cong} \frac{e^{2x}}{6} - \frac{x^2}{6} + c$

f) $\int 2\cos(3x)\ dx \overset{O1}{\cong} \frac{2}{3}\int \cos(3x) \cdot 3\, dx \overset{C5}{\cong} \frac{2}{3} sen(3x) + c$

g) $\int \frac{1}{4+x^2}\, dx = \int \frac{\frac{1}{4}}{\frac{4+x^2}{4}}\, dx = \int \frac{\frac{1}{4}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\, dx \overset{C8}{\cong} \frac{1}{2} \cdot arctg\left(\frac{x}{2}\right) + c$

---

5. Integración de funciones racionales

Las funciones racionales son de la forma $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y están definidas siempre que $Q(x) \neq 0$.

Las integrales racionales son del tipo:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$$

Supondremos que el grado del numerador es menor que el grado del denominador pues en caso contrario, haciendo la división entera, se tiene:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \quad Q(x) \neq 0$$

y el problema se reduciría a integrar la función polinómica $C(x)$, que es inmediata, y la función $\frac{R(x)}{Q(x)}$, cuyo numerador es de grado inferior al denominador:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = \int C(x)\, dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\, dx$$

Por tanto, a partir de ahora, suponemos grado$(P(x))$ <grado$(Q(x))$.

En primer lugar tenemos que hallar las raíces del polinomio $Q(x)$. Según que éstas sean simples, de multiplicidad k o complejas se procede de forma distinta. Aquí solo analizaremos los dos primeros supuestos.

5.1 Solo raíces reales simples en $Q(x)$

Sean $x_1, x_2, \dots, x_k$ las raíces reales simples del polinomio $Q(x)$.

Descomponemos el integrando $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en una suma de fracciones, que tengan por denominador polinomios de primer grado $(x - x_i)$ con $i = 1, 2, \dots k$ de la forma siguiente:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \cdots + \frac{A_k}{x-x_k}$$

y determinamos los valores $A_1, A_2, \dots, A_k$. Después bastará hacer

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{A_1}{x-x_1}\,dx + \int \frac{A_2}{x-x_2}\,dx + \cdots + \int \frac{A_k}{x-x_k}\,dx =$$
$$= A_1 \cdot L|x-x_1| + A_2 \cdot L|x-x_2| + \ \ldots\ + A_k \cdot L|x-x_k| + c$$

Ejemplo 5

Calcula la integral racional

$$I = \int \frac{x^3}{x^2+3x-4}\,dx$$

Resolución

Como el grado del polinomio numerador no es menor que el grado del polinomio denominador, efectuamos la división $x^3 \,\underline{|\, x^2+3x-4\,}$ obteniendo como cociente el polinomio $C(x) = x-3$ y como resto el polinomio $R(x) = 13x-12$

Así:

$$I = \int \frac{x^3}{x^2+3x-4}\,dx = \int (x-3)\,dx + \int \frac{13x-12}{x^2+3x-4}\,dx = I_1 + I_2$$

La integral I_1 es inmediata:

$$I_1 = \int (x-3)\,dx = \frac{(x-3)^2}{2} + c_1$$

La integral I_2 es racional pero ahora el grado del numerador es menor que el grado del denominador por lo que procedemos como hemos indicado anteriormente.

Calculamos las raíces del polinomio x^2+3x-4.

$$x^2+3x-4=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-4 \end{cases} \Rightarrow x^2+3x-4 = (x-1)\cdot(x+4)$$

Escribimos el integrando de la forma siguiente

$$\frac{13x-12}{x^2+3x-4} = \frac{\mathbf{13x-12}}{(\mathbf{x-1})\cdot(\mathbf{x+4})} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+4} = \frac{\mathbf{A}\cdot(\mathbf{x+4}) + \mathbf{B}\cdot(\mathbf{x-1})}{(\mathbf{x-1})\cdot(\mathbf{x+4})}$$

por lo cual

$$13x-12 = A\cdot(x+4) + B\cdot(x-1)$$

y sustituyendo $x=1$ y $x=-4$ obtenemos $\begin{cases} 1 = 5A \\ -64 = -5B \end{cases}$ de donde $A = 1/5$ y $B = 64/5$

Por tanto:

$$I_2 = \int \frac{13x-12}{x^2+3x-4}\,dx = \int \frac{1/5}{x-1}\,dx + \int \frac{64/5}{x+4}\,dx = \frac{1}{5}L|x-1| + \frac{64}{5}L|x+4| + c_2$$

La integral $I = I_1 + I_2$ queda:

$$I = \int \frac{x^3}{x^2+3x-4}\,dx = \frac{(x-3)^2}{2} + \frac{1}{5}L|x-1| + \frac{64}{5}L|x+4| + c$$

5.2 Solo raíces reales simples y de multiplicidad r en $Q(x)$

Para cada raíz simple procedemos como en el apartado anterior y para cada raíz x_p de multiplicidad r consideramos, en la descomposición del integrando, los sumandos

$$\frac{A_r}{(x-x_p)^r} + \frac{A_{r-1}}{(x-x_p)^{r-1}} + \cdots + \frac{A_2}{(x-x_p)^2} + \frac{A_1}{x-x_p}$$

Ejemplo 6

Calcula la integral racional

$$I = \int \frac{2x-1}{(x-1)\cdot(x+2)^2}dx$$

Resolución

Las raíces del polinomio denominador son $x = 1$ y $x = -2$ (doble).

Descomponemos el integrando en suma de fracciones:

$$\frac{2x-1}{(x-1)\cdot(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x+2)^2 + B(x-1) + C(x-1)\cdot(x+2)}{(x-1)\cdot(x+2)^2}$$

y así

$$2x-1 = A(x+2)^2 + B(x-1) + C(x-1)\cdot(x+2)$$

Sustituyendo en la igualdad de polinomios los valores $x = 1, x = -2$ y $x = 0$ tenemos

$$\begin{cases} 1 = 9A \\ -5 = -3B \\ -1 = 4A - B - 2C \end{cases} \quad \text{de donde } A = \frac{1}{9}\ ;\ B = \frac{5}{3}\ ;\ C = -\frac{1}{9}$$

$$I = \int \frac{2x-1}{(x-1)\cdot(x+2)^2}dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{5}{3}\int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx - \frac{1}{9}\int \frac{1}{x+2}\,dx$$

La segunda integral es $\int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx = \int (x+2)^{-2}\,dx \overset{C3}{\cong} \frac{(x+2)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x+2} + c_1$

Por tanto

$$I = \int \frac{2x-1}{(x-1)\cdot(x+2)^2}dx = \frac{1}{9}L|x-1| - \frac{5}{3(x+2)} - \frac{1}{9}L|x+1| + c$$

5.2 Factores cuadráticos irreducibles en $Q(x)$ y posiblemente algunos factores lineales

Los factores lineales se manejan como en los dos casos anteriores y, por cada factor cuadrático irreducible $x^2 + bx + c$ se coloca un término $\frac{Mx+N}{x^2+bx+c}$ en la representación del integrando.

Ejemplo 7

Calcula la integral racional

$$I = \int \frac{dx}{(x-2)^2\cdot(x^2+2)}$$

Resolución

El polinomio denominador tiene una raíz real doble $x = 2$ y un factor cuadrático irreducible $x^2 + 2$.

Descomponemos el integrando en suma de fracciones:

$$\frac{1}{(x-2)^2\cdot(x^2+2)} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{Mx+N}{x^2+2}$$
$$= \frac{A\cdot(x^2+2) + B\cdot(x-2)\cdot(x^2+2) + (Mx+N)\cdot(x-2)^2}{(x-2)^2\cdot(x^2+2)}$$

e igualando numeradores obtenemos:

$$1 = A\cdot(x^2+2) + B\cdot(x-2)\cdot(x^2+2) + (Mx+N)\cdot(x-2)^2$$

Para $x = 2$, $1 = 2A$, de donde $A = 1/6$

Para $x = 0, x = 1, x = -1$ obtenemos $\begin{cases} 1 = 2A - 4B + 4N \\ 1 = 3A - 3B + M + N \\ 1 = 3A - 9B - 9M + 9N \end{cases} \overset{A=1/6}{\Leftrightarrow} \begin{cases} N - B = 1/6 \\ M + N - 3B = 1/2 \\ M + N + B = -1/18 \end{cases}$

que tiene la solución $B=\frac{-1}{9}, M=\frac{1}{9}\ \ y\ \ N=\frac{1}{18}$

Así,

$$I=\int\frac{dx}{(x-2)^2\cdot(x^2+2)}=\frac{1}{6}\int\frac{dx}{(x-2)^2}-\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{\frac{1}{9}x+\frac{1}{18}}{x^2+2}dx$$

Sean

$$I_1=\frac{1}{6}\int\frac{dx}{(x-2)^2}=\frac{1}{6}\int(x-2)^{-2}dx=\frac{1}{6}\frac{(x-2)^{-1}}{-1}+c_1=\frac{-1}{6(x-2)}+c_3$$

$$I_2=\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x-2}=\frac{1}{9}L|x-2|+c_2$$

$$I_3=\int\frac{\frac{1}{9}x+\frac{1}{18}}{x^2+2}dx=\frac{1}{9}\int\frac{x}{x^2+2}dx+\frac{1}{18}\int\frac{dx}{x^2+2}=\frac{1}{18}L|x^2+2|+\frac{1}{18}\int\frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}dx=$$

$$=\frac{1}{18}L|x^2+2|+\frac{\sqrt{2}}{36}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+c_3$$

Entonces

$$I=\int\frac{dx}{(x-2)^2\cdot(x^2+2)}=\frac{-1}{6(x-2)}-\frac{1}{9}L|x-2|+\frac{1}{18}L|x^2+2|+\frac{\sqrt{2}}{36}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+c$$

---

6. Integración por partes

El método de integración por partes se basa en la derivada de un producto de funciones. A partir de él se obtiene una regla que permite calcular la integración de un producto de dos funciones.

Sean u y v dos funciones reales de variable real. La derivada de su producto es

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$$

o empleando notación diferencial

$$d(u\cdot v)=du\cdot v+u\cdot dv$$

de donde

$$u\cdot dv=d(u\cdot v)-du\cdot v$$

e integrando ambos miembros obtenemos la regla que buscamos:

$$\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du$$

Conocida como regla de integración por partes que permite resolver integrales identificando el integrando con $\int u\cdot dv$.

Ejemplo 8

Calcula la integral

$$I=\int x\cdot e^x\,dx$$

Resolución

El integrando es un producto de funciones en el que las reglas de integración inmediatas no se pueden aplicar. Utilizamos el método de integración por partes:

Identificamos

$$\int x\cdot e^x\,dx\ \ con\ \int u\cdot dv\quad\Leftrightarrow\quad\begin{matrix}u=x\\dv=e^x\,dx\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}du=dx\\v=\int dv=\int e^x\,dx=e^x\end{matrix}$$

Así, aplicando la fórmula de integración por partes, obtenemos la integral

$$I=\int x\cdot e^x\,dx=xe^x-\int e^x\,dx=xe^x-e^x+c=e^x(x-1)+c$$

Ejemplo 9

Calcula la integral

$$I=\int \frac{x}{cos^2x}dx$$

Resolución

El integrando es un producto de funciones en el que las reglas de integración inmediatas no se pueden aplicar. Utilizamos el método de integración por partes:

Identificamos

$$\int \frac{x}{cos^2x}dx \ con \ \int u\cdot dv \ \Leftrightarrow \ \begin{matrix} u=x \\ dv=\frac{dx}{cos^2x} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} du=dx \\ v=\int dv=\int \frac{dx}{cos^2x}=tgx \end{matrix}$$

$$I=\int \frac{x}{cos^2x}dx=x\cdot tgx-\int tgx\,dx$$

$$y\ como\ \int tgx\,dx=\int \frac{senx}{cosx}\,dx=-\int \frac{-senx}{cosx}\,dx-L|cosx|+c\ tenemos\ que$$

$$I=\int \frac{x}{cos^2x}dx=x\cdot tgx-\int tgx\,dx=x\cdot tgx+L|cosx|+c$$

7. Integración por cambio de variable

7.1 $\int sen^m x. cos^n x\ dx$

Impar en seno: cambio $cosx=t$

Impar en coseno: cambio $senx=t$

Par en seno y coseno: cambio $tgx=t \Longrightarrow \begin{cases} dx=\frac{dt}{1+t^2} \\ cos^2x=\frac{1}{1+t^2} \\ sen^2x=\frac{t^2}{1+t^2} \end{cases}$

En general: cambio $tg\frac{x}{2}=t \Longrightarrow \begin{cases} dx=\frac{2}{1+t^2}dt \\ sent=\frac{2t}{1+t^2} \\ cost=\frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$

Ejemplo 10

Calcula la integral

$$I=\int \frac{cos^3x}{sen^2x}\,dx$$

Resolución

Hacemos $senx=t, cosx\cdot dx=dt$

$$I=\int \frac{cos^3x}{sen^2x}\,dx=\int \frac{cos^2x\cdot cosx\cdot dx}{sen^2x}=\int \frac{1-t^2}{t^2}\,dt=\frac{-1}{t}-t+c \overset{senx=t}{\cong} \frac{-1}{senx}-senx+c$$

Ejemplo 11

Calcula la integral

$$I=\int \frac{sen^4x}{cos^8x}\,dx$$

Resolución

Hacemos $tgx = t \Longrightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$; $cos^2x = \frac{1}{1+t^2}$; $sen^2x = \frac{t^2}{1+t^2}$

$$I = \int \frac{sen^4x}{cos^8x}\,dx = \int \frac{\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^2}{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^4}\,\frac{dt}{1+t^2} = \int (t^4+t^6)\,dt = \frac{t^5}{5}+\frac{t^7}{7}+c = \frac{tg^5x}{5}+\frac{tg^7x}{7}+c$$

7.2 $\int (a^2 - b^2x^2)dx$

Cambio: $x = \frac{a}{b}\cdot sent$; $dx = \frac{a}{b}\cdot cost\cdot dt$; $sent = \frac{bx}{a}$; $t = arcsen\left(\frac{bx}{a}\right)$

Ejemplo 12

Calcula la integral

$$I = \int \sqrt{4-9x^2}\,dx$$

Resolución

Cambio: $x = \frac{2}{3}\cdot sent$, $dx = \frac{2}{3}\cdot cost\cdot dt$; $sent = \frac{3x}{2}$; $t = arcsen\left(\frac{3x}{2}\right)$

$$I = \int \sqrt{4-9x^2}\,dx = \frac{2}{3}\int \sqrt{4-4\cdot sen^2t}\cdot cost\cdot dt = \frac{4}{3}\int cos^2t\ dt = \frac{4}{3}\int \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{dt}{2} + \frac{2}{3}\int \cos(2t)\,dt = \frac{2t}{3} + \frac{sen(2t)}{3} + c \overset{[1]}{\cong} \frac{2}{3}arcsen\left(\frac{3x}{2}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{4-9x^2} + c$$

[1] $sen(2t) = 2\cdot sent\cdot cost$

7.3 Otros cambios de variable

Ejemplo 13

Calcula la integral

$$I = \int \frac{dx}{(x-2)\cdot\sqrt{x+2}}$$

Cambio $x+2 = t^2$; $dx = 2t\cdot dt$; $x-2 = t^2-4$

$$I = \int \frac{dx}{(x-2)\cdot\sqrt{x+2}} = \int \frac{2}{t^2-4}dt = \int \frac{2}{(t+2)\cdot(t-2)}dt$$

Se trata de una integral racional con raíces reales simples en su denominador:

$$\frac{2}{(t+2)\cdot(t-2)} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-2} = \frac{A\cdot(t-2)+B\cdot(t+2)}{(t+2)\cdot(t-2)}$$

Igualando numeradores:

$$2 = A\cdot(t-2)+B\cdot(t+2) \Longrightarrow \begin{cases} t=2 \Longrightarrow 2 = 4B \Longrightarrow B = 1/2 \\ t=-2 \Longrightarrow 2 = -4A \Longrightarrow A = -1/2 \end{cases}$$

$$I = \int \frac{dt}{(t+2)\cdot(t-2)} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-2} = \frac{1}{2}L[|t-2| - L|t+2|] + c = \frac{1}{2}L\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + c$$

y, deshaciendo el cambio, tenemos

$$I = \int \frac{dx}{(x-2)\cdot\sqrt{x+2}} = \frac{1}{2}L\left|\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+2}+2}\right| + c$$