**1º)**
**a) Teorema del valor medio de Lagrange. Enunciado, interpretación geométrica y demostración.**
**b) Razona si se puede aplicar el teorema del valor medio a la función**

$$f(x)=\begin{cases} x\cdot lnx & si\ x>0 \\ 0 & si\ x=0 \end{cases}$$

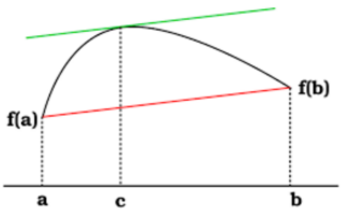
**en el intervalo $[0,e]$ y, en caso afirmativo, halla el valor al que se refiere.**

Resolución

a)

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ continua\ en\ [a,b] \\ f(x)\ derivable\ en\ (a,b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists c\in(a,b)\ tal\ que\ f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

esto es, existe al menos un punto $c$ del intervalo $(a,b)$ en el que la recta tangente a la curva $y=f(x)$ es paralela a la cuerda que une los puntos $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$




*Demostración*

La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$ es

$$y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$$

Definimos la función auxiliar $g(x)$ que para cada $x\in(a,b)$ mide la distancia entre $f(x)$ y su valor en la secante:

$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$$

$$\left.\begin{array}{r} g(x)\ continua\ en\ [a,b]\ por\ serlo\ f \\ g(x)\ derivable\ en\ (a,b)\ por\ serlo\ f \\ g(a)=g(b) \end{array}\right\} \overset{T.Rolle}{\Longrightarrow} \exists c\in(a,b)\ tal\ que\ g'(c)=0,\text{ es decir,}$$

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0\ de\ donde\ f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Si la función $f$ representase la ecuación de movimiento de un móvil, este teorema nos dice que en al menos un punto $c$ del intervalo de tiempos $[a,b]$ la velocidad instantánea coincide con la velocidad media en el trayecto $[a,b]$.

b)

Continuidad

$\forall x\in\mathbb{R}, x>0\ \ f(x)=x\cdot lnx$ continua por ser producto de continuas.

Veamos que es continua a la derecha en $x=0$:

1º) $f(0)=0$

2º) $\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+} x\cdot lnx \overset{0\cdot(-\infty)}{\cong} \lim_{x\to0^+}\frac{lnx}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}L`H\widehat{o}p}{\cong} \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}(-x)=0$

3º) $f(0)=\lim_{x\to0^+} f(x)$

Por tanto, $f(x)$ es continua en el intervalo $[0,+\infty)$ y, en particular, en el intervalo $[0,e]$.
Derivabilidad
$\forall x \in \mathbb{R}, x > 0,\ f(x) = x \cdot lnx$ y $f'(x) = lnx + 1$ que está bien definida en $(0,+\infty)$. Así, $f(x)$ es derivable en el intervalo $(0,e)$.
Se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[0,e]$.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ continua\ en\ [0,e] \\ f(x)\ derivable\ en\ (0,e) \end{array}\right\} \overset{T.Valor\ medio}{\Longrightarrow} \exists c \in (0,e)\ tal\ que\ f'(c) = \frac{f(e)-f(0)}{e-0} = 1$$

$$f'(c) = lnc + 1 = 1 \Leftrightarrow lnc = 0 \Leftrightarrow c = e^0 = 1$$

En el punto de abscisa $x = 1$, $P(1,0)$, la recta tangente a la curva $y = f(x)$ , $t \equiv y = x - 1$, es paralela a la cuerda que une los puntos $P(0,0)$ y $Q(e,e)$.

**2º) Demuestra que las gráficas de las funciones $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y $g(x) = 2x - 1$ se cortan en al menos un punto y calcúlalo con una cifra decimal exacta.**

**Resolución**

Sea $h(x) = \frac{1}{1+x^2} - 2x + 1$ continua en $\mathbb{R}$ por ser suma y resta de continuas y $1 + x^2 \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{r} h(x)\ es\ continua\ en\ [0,1] \\ h(0) = 2 > 0 \\ h(1) = -\frac{1}{2} < 0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \exists c \in (0,1)\ tal\ que\ h(c) = 0$$

$$h(c) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1+c^2} - 2c + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{1+c^2} = 2c - 1$$

por tanto, las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en el punto de abscisa $x = c \in (0,1)$.

$$\left.\begin{array}{r} h(x)\ es\ continua\ en\ [0'8, 0'9] \\ h(0'8) = 0{,}0098 > 0 \\ h(0'9) = -0{,}2475 < 0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \exists c \in (0'8, 0'9)\ tal\ que\ h(c) = 0$$

Así, el punto de corte, con una cifra decimal exacta es $c = 0{,}8 \ldots$.

**3º) La velocidad de una partícula, medida en m/sg, está determinada en función del tiempo $t \geq 0$ , medido en segundos, por la expresión $v(t) = (t^2 + 2t) \cdot e^{-t}$ . Se pide:**
**a) ¿En qué instante de tiempo alcanza la velocidad máxima?**
**b) Calcula $\lim_{t \to +\infty} v(t)$, e interpreta el resultado obtenido.**

**Resolución**

a) Calculamos los puntos críticos de la función derivable $v(t) = (t^2 + 2t) \cdot e^{-t}$:

$$v'(t) = (2t + 2) \cdot e^{-t} - (t^2 + 2t) \cdot e^{-t} = e^{-t} \cdot (2 - t^2)$$

$$v'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-t} \cdot (2 - t^2) = 0 \overset{e^{-t}>0}{\Longleftrightarrow} 2 - t^2 = 0 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{2}$$

Como $t \geq 0$ solo consideramos la solución positiva.

$$v''(t) = -e^{-t} \cdot (2 - t^2) - 2t \cdot e^{-t} = e^{-t} \cdot (t^2 - 2t - 2)$$

$$v''(\sqrt{2}) = 2 \cdot e^{-\sqrt{2}} \cdot (1 - \sqrt{2}) < 0$$

Así, por el criterio de la segunda derivada, el punto crítico $t = \sqrt{2}$ es un máximo de la función velocidad $v(t)$.
En consecuencia, la partícula alcanza la velocidad máxima al cabo de $\sqrt{2} \cong 1{,}414\ sg$

b) $\lim_{t \to +\infty} v(t) = \lim_{t \to +\infty} (t^2 + 2t) \cdot e^{-t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^2+2t}{e^t} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}\ L`Hôp}{\cong} \lim_{t \to +\infty} \frac{2t+2}{e^t} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}\ L`Hôp}{\cong} \lim_{t \to +\infty} \frac{2}{e^t} \overset{\frac{2}{+\infty}}{\cong} 0$

Cuando aumenta el tiempo la partícula tiende a detenerse.

**4º) Demuestra que la ecuación $x^5 - 5x + 3 = 0$ tiene exactamente tres raíces reales.**

**Resolución**

Sea $f(x) = x^5 - 5x + 3$ continua en $\mathbb{R}$ por ser polinómica.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ es\ continua\ en\ [-2,-1] \\ f(-2) = -19 < 0 \\ f(-1) = 7 > 0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \exists c_1 \in (-2,-1)\ tal\ que\ f(c_1) = 0 \Leftrightarrow {c_1}^5 - 5c_1 + 3 = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ es\ continua\ en\ [-1,1] \\ f(-1) = 7 > 0 \\ f(1) = -1 < 0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \exists c_2 \in (-1,1)\ tal\ que\ f(c_2) = 0 \Leftrightarrow {c_2}^5 - 5c_2 + 3 = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ es\ continua\ en\ [1,2] \\ f(1) = -1 < 0 \\ f(2) = 25 > 0 \end{array}\right\} \overset{T.Bolzano}{\Longrightarrow} \exists c_3 \in (1,2)\ tal\ que\ f(c_3) = 0 \Leftrightarrow {c_3}^5 - 5c_3 + 3 = 0$$

Así, $c_1, c_2$ y $c_3$ son tres raíces de la ecuación $x^5 - 5x + 3 = 0$. Veamos que no tiene más. Supongamos que $c_4$ fuese otra raíz de la ecuación. Aplicando el teorema de Rolle a la función $f(x)$ en los intervalos $(c_1, c_2), (c_2, c_3)\ y\ (c_3, c_4)$ se tiene:

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ continua\ en\ \ [c_1, c_2] \\ f(x)\ derivable\ en\ (c_1, c_2) \\ f(c_1) = f(c_2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists x_1 \in (c_1, c_2)\ tal\ que\ f'(x_1) = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ continua\ en\ \ [c_2, c_3] \\ f(x)\ derivable\ en\ (c_2, c_3) \\ f(c_2) = f(c_3) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists x_2 \in (c_2, c_3)\ tal\ que\ f'(x_2) = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ continua\ en\ \ [c_3, c_4] \\ f(x)\ derivable\ en\ (c_3, c_4) \\ f(c_3) = f(c_4) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists x_3 \in (c_3, c_4)\ tal\ que\ f'(x_3) = 0$$

es decir, encontramos tres puntos $x_1, x_2$ y $x_3$ de derivada nula.

Sin embargo, $f'(x) = 5x^4 - 5$ y $5x^4 - 5 = 0$ solo tiene dos soluciones $x = \pm 1$; esto contradice la existencia de tres valores $x_1, x_2$ y $x_3$ con derivada nula. La contradicción viene de suponer la existencia de una cuarta raíz $c_4$. Por tanto, la ecuación tiene exactamente tres raíces $c_1, c_2$ y $c_3$.

**5º) Calcula los límites siguientes:**

**a)** $\lim\limits_{x\to 0^+} (tgx)^x$

**b)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{senx}{|x|}$

**Resolución**

a)

$$ln\left(\lim_{x\to 0^+} (tgx)^x\right) = \lim_{x\to 0^+} (ln(tgx)^x) = \lim_{x\to 0^+} \left(x \cdot ln(tgx)\right) \overset{0\cdot(-\infty)}{\widehat{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{ln(tgx)}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{-\infty}{+\infty} L`H\hat{o}p}{\widehat{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\frac{1}{cos^2x}}{tgx}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{cos^2x \cdot tgx} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{senx \cdot cosx} \overset{\frac{0}{0} L`H\hat{o}p}{\widehat{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x}{cos^2x - sen^2x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$ln\left(\lim_{x\to 0^+} (tgx)^x\right) = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} (tgx)^x = e^0 = 1$$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{senx}{|x|}$

$$\frac{senx}{|x|}=\begin{cases}\dfrac{senx}{x} & si\ x>0\\ -\dfrac{senx}{x} & si\ x<0\end{cases}$$

Calculamos los límites laterales en $x=0$:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{senx}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{senx}{x}\overset{\frac{0}{0}L`H\hat{o}p}{\cong}\lim_{x\to 0^+}cosx=1\quad ;\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{senx}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-senx}{x}\overset{\frac{0}{0}L`H\hat{o}p}{\cong}\lim_{x\to 0^+}(-cosx)=-1$$

Como los límites laterales no coinciden, no existe el límite pedido $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{|x|}$

**6º) Deriva y simplifica:**

**a)** $f(x)=\frac{senx+sen(x+1)}{cosx-\cos(x+1)}$ **¿Es constante la función?**

**b)** $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

**Resolución**

a)

$$f'(x)=\frac{(cosx+\cos(x+1))\cdot(cosx-\cos(x+1))+\big(senx+sen(x+1)\big)\cdot\big(senx-sen(x+1)\big)}{(cosx-\cos(x+1))^2}=$$

$$=\frac{cos^2x-cos^2(x+1)+sen^2x-sen^2(x+1)}{(cosx-\cos(x+1))^2}=\frac{cos^2x+sen^2x-\big(sen^2(x+1)+cos^2(x+1)\big)}{(cosx-\cos(x+1))^2}=$$

$$=\frac{1-1}{(cosx-\cos(x+1))^2}=0$$

Como la derivada es nula, la función es constante.

b)

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\Rightarrow ln\big(f(x)\big)=ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=x\cdot ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

Derivando ambos miembros de la igualdad:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}=ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$$

y, despejando $f'(x)$, obtenemos

$$f'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\cdot\left[ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right]$$

**7º) Sea $f(x)=\ln(1-2x)$. Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de igual pendiente que la recta tangente a $g(x)=\frac{senx}{x-1}$ en $x=0$.**

**Resolución**

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x)=\frac{senx}{x-1}$ en $x=0$ es $g'(0)$:

$$g'(x)=\frac{cosx\cdot(x-1)-senx}{(x-1)^2}\quad y\quad g'(0)=\frac{-1}{1}=-1$$

Buscamos en qué punto $x$ se cumple que $f'(x)=-1$ para que se cumpla la condición del enunciado:

$$f'(x)=\frac{-2}{1-2x}\quad ;\quad \frac{-2}{1-2x}=-1\Rightarrow 1-2x=2\Rightarrow x=-1/2$$

Recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=-1/2$ y $f\left(\frac{-1}{2}\right)=ln2$

$$t \equiv y - ln2 = -1 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \quad ; \quad t \equiv y = -x + ln2 - 1/2$$

**8º) Estudia el dominio, corte con los ejes, monotonía, curvatura y asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^2-5}{2x-4}$. Esboza su gráfica.**

**Resolución**

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{2\}$ porque $2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Cortes con los ejes coordenados

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{2x - 4} \begin{cases} x = 0 \Longrightarrow y = \frac{5}{4}; \quad P\left(0, \frac{5}{4}\right) \\ y = 0 \Longrightarrow \frac{x^2 - 5}{2x - 4} \Longrightarrow x^2 - 5 = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{5}; \quad Q\left(-\sqrt{5}, 0\right) \; y \; R\left(\sqrt{5}, 0\right) \end{cases}$$

Monotonía: $f'(x) = \frac{2x\cdot(2x-4)-(x^2-5)\cdot 2}{(2x-4)^2} = \frac{2x^2-8x+10}{(2x-4)^2} > 0$ en el dominio. Creciente.

Curvatura: $f''(x) = \frac{(4x-8)\cdot(2x-4)^2-(2x^2-8x+10)\cdot 2\cdot 2(2x-4)}{(2x-4)^4} = \frac{(4x-8)\cdot(2x-4)-4\cdot(2x^2-8x+10)}{(2x-4)^3} = \frac{-40}{(2x-4)^3}$

$$f''(x) = \frac{-40}{(2x - 4)^3} \begin{cases} > 0 \Leftrightarrow 2x - 4 < 0 \Leftrightarrow x < 2. \, (-\infty, 2) \; Cóncava \\ < 0 \Leftrightarrow 2x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 2. \, (2, +\infty) \; Convexa \end{cases}$$

Asíntotas verticales:

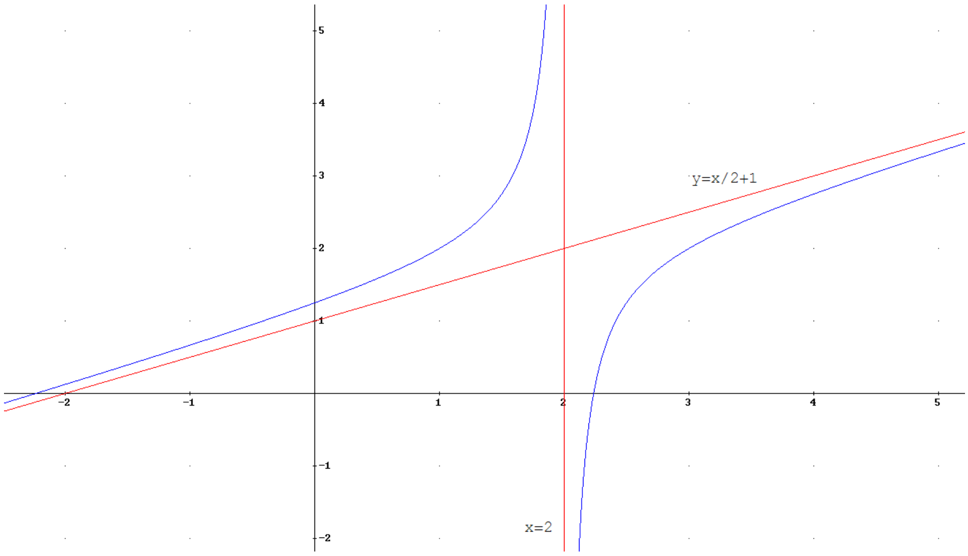
$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-5}{2x-4} \overset{\frac{-1}{0}}{=} \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{x^2-5}{2x-4} \overset{\frac{-1}{0^-}}{=} +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x^2-5}{2x-4} \overset{\frac{-1}{0^+}}{=} -\infty \end{cases} \quad \text{la recta } x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

Asíntota horizontal no tiene porque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-5}{2x-4} = \pm\infty$

Asíntota oblicua: $y = mx + n$

$m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{x^2-5}{2x-4}}{x} = \frac{1}{2}$ ; $n = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2-5}{2x-4} - \frac{x}{2}\right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{4x-10}{4x-8} = 1$

$y = \frac{x}{2} + 1$ es asíntota oblicua




**Puntuación**

1 -------------------- 2 puntos

2, 3, 4, 8 ----------- 1,25 “

5, 6, 7 -------------- 1 “