1º) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}4 & -3 & -3\\ 5 & -4 & -4\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -3\end{pmatrix}$

a) Determina si A y B son inversibles.
b) Calcula el determinante de la matriz $C=A^2\cdot(B^t)^3$.
c) Calcula A^{86}.

Resolución

a) $\begin{vmatrix}4 & -3 & -3\\ 5 & -4 & -4\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix} \overset{C_1+C_2}{=} \begin{vmatrix}1 & -3 & -3\\ 1 & -4 & -4\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & -4\end{vmatrix} = 1 \neq 0. \, Es\ inversible.$

$\begin{vmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -3\end{vmatrix} \overset{C_3+3\cdot C_1}{=}) \begin{vmatrix}3 & 2 & 8\\ 1 & 1 & 4\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 8\\ 1 & 4\end{vmatrix} = 0. \, No\ es\ inversible$

b) $|C| = |A^2\cdot(B^t)^3| = |A^2|\cdot|(B^t)^3| = |A|^2\cdot|B^t|^3 \overset{|B|=|B^t|}{=} |A|^2\cdot|B|^3 = 1\cdot 0 = 0$

c) $A^2=\begin{pmatrix}4 & -3 & -3\\ 5 & -4 & -4\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -3 & -3\\ 5 & -4 & -4\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -3 & 0\\ 4 & -3 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$

$A^3 = A\cdot A^2 = \begin{pmatrix}4 & -3 & -3\\ 5 & -4 & -4\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -3 & 0\\ 4 & -3 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = I\ \ que\ es\ la\ matriz\ unidad.$

$Así, las\ sucesivas\ potencias\ de\ la\ matriz\ A\ son: A, A^2, I, A, A^2, I, \ldots$
$La\ división\ entera\ de\ 86\ entre\ 3\ es\ 28\ y\ resto\ 2.$

Por tanto, $A^{86}=A^2=\begin{pmatrix}4 & -3 & 0\\ 4 & -3 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$

2º) El determinante de una matriz cuadrada A de orden 4 es 1. Razona si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes:

a) $|2\cdot A| = 16$

b) El rango de la matriz A es 1.

c) El sistema de ecuaciones lineales $A\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \ldots\\ 0\end{pmatrix}$ **tiene solución única $x_1=x_2=x_3=x_4=0$.**

Resolución

a) $|2\cdot A| = 2^4\cdot|A| = 16\cdot 1 = 16$. Es verdadera.

b) Es falsa porque al ser A cuadrada de orden 4 y $|A| = 1 \neq 0$, se tiene $rg(A) = 4$.

c) Es verdadera porque al ser $|A| = 1 \neq 0$, se tiene $rg(A) = 4$.

Al tratarse de un sistema homogéneo, $rg(A) = 4 = n^{\underline{o}}\ de\ incógnitas. S.C.D.$ Solución trivial.

3º) Determinar el valor de a que anula el determinante $\begin{vmatrix}3a+1 & a & a\\ 6a+2 & 2a+1 & 2a\\ 3a+1 & a & a+1\end{vmatrix}$

Resolución

$\begin{vmatrix}3a+1 & a & a\\ 6a+2 & 2a+1 & 2a\\ 3a+1 & a & a+1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3a & a & a\\ 6a & 2a+1 & 2a\\ 3a & a & a+1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & a & a\\ 2 & 2a+1 & 2a\\ 1 & a & a+1\end{vmatrix} =$

$= 3a\begin{vmatrix}1 & a & a\\ 2 & 2a+1 & 2a\\ 1 & a & a+1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & a & a\\ 2 & 2a+1 & 2a\\ 1 & a & a+1\end{vmatrix} = (3a+1)\cdot\begin{vmatrix}1 & a & a\\ 2 & 2a+1 & 2a\\ 1 & a & a+1\end{vmatrix} =$

$$\overset{F_2-2\cdot F_1}{\cong} (3a+1)\cdot\begin{vmatrix}1 & a & a\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & a & a+1\end{vmatrix} = (3a+1)\cdot\begin{vmatrix}1 & a\\ 1 & a+1\end{vmatrix} = 3a+1$$

$$3a+1=0 \Leftrightarrow a=-\frac{1}{3}$$

4º) Resuelve la ecuación matricial $X\cdot A - B = C$**, siendo**

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad y \quad C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Resolución

$$X\cdot A - B = C \Leftrightarrow X\cdot A = B + C \Leftrightarrow X = (B+C)\cdot A^{-1}$$

Inversa de A:

$$|A| = \begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = 1 \ ; \ A^{-1} = \frac{1}{|A|}[Adj(A)]^t = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \ ; \ B+C = \begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

La solución es: $X=(B+C)\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -2 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}$

5º) La liga de fútbol de un cierto país la forman 21 **equipos que juegan a doble vuelta. Este año, los partidos ganados valían** 3 **puntos, los empatados** 1 **punto y los perdidos** 0 **puntos. En estas condiciones, el equipo campeón de liga obtuvo** 70 **puntos.**
Hasta el año pasado los partidos ganados valían 2 **puntos y el resto igual. Con ese sistema antiguo, el actual campeón hubiera obtenido** 50 **puntos.**
Plantea un sistema de ecuaciones lineales y determina cuántos partidos ganó, empató y perdió el equipo campeón.

Resolución

Sean x, y, z el número de partidos ganados, empatados y perdidos por el equipo campeón.
Como la liga la forma 21 equipos, el equipo campeón juega con los 20 restantes. Al tratarse de una competición de ida y vuelta (en casa y fuera de ella), juega 40 partidos en total.
El sistema de ecuaciones que resuelve el problema es:

$$\begin{cases} x+y+z=40\\ 3x+y=70\\ 2x+y=50\end{cases}$$

Aplicando el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 40\\ 3 & 1 & 0 & 70\\ 2 & 1 & 0 & 50\end{pmatrix} \overset{\substack{F_2-3\cdot F_1\\ F_3-2\cdot F_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 40\\ 0 & -2 & -3 & -50\\ 0 & -1 & -2 & -30\end{pmatrix} \overset{2\cdot F_3-F_2}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 40\\ 0 & -2 & -3 & -50\\ 0 & 0 & -1 & -10\end{pmatrix}$$

obtenemos el sistema escalonado

$\begin{cases} x+y+z=40\\ -2y-3z=-50\\ -z=-10\end{cases}$ cuya solución es $z=10;\ y=10; x=20$

El equipo campeón ganó 20 partidos, empató 10 y perdió 10

6º) Considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real k**:**

$$\begin{cases} x+y+(k+1)z=9\\ 3x-2y+z=20k\\ x+y+2kz=9\end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro k**.**
b) Resuélvelo cuando sea compatible.

Resolución

a) Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & k+1\\ 3 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 2k\end{pmatrix}$

Matriz ampliada con la columna de términos independientes: $A^{*}=\begin{pmatrix}1 & 1 & k+1 & 9\\ 3 & -2 & 1 & 20k\\ 1 & 1 & 2k & 9\end{pmatrix}$

$$det(A)=|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & k+1\\ 3 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 2k\end{vmatrix}\overset{C_2-C_1}{\widehat{=}}\begin{vmatrix}1 & 0 & k+1\\ 3 & -5 & 1\\ 1 & 0 & 2k\end{vmatrix}=-5\cdot\begin{vmatrix}1 & k+1\\ 1 & 2k\end{vmatrix}=-5\cdot(k-1)$$

$|A|=0 \iff -5\cdot(k-1)=0 \iff k=1$

Caso 1 $\forall k\in\mathbb{R}\;\; k\neq 1\;\;\; |A|\neq 0$. Por tanto $rg(A)=3=rg(A^{*})=n^{\text{o}}\ incógnitas$

$$Sistema\ Compatible\ Determinado\ (Solución\ única)$$

Caso 2 $k=1$ En este caso $|A|=0\;\; y\;\; rg(A)<3$.

Matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^{*}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 9\\ 3 & -2 & 1 & 20\\ 1 & 1 & 2 & 9\end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-5\neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A)=2$.

En la matriz ampliada coinciden la fila 1 y la fila 3; su rango coincidirá con el de A: $rg(A^{*})=2$

$$rg(A)=rg(A^{*})=2<n^{\text{o}}\ incógnitas:\;\; Sistema\ Compatible\ Indeterminado.$$

b)

Resolvemos $\forall k\in\mathbb{R}, k\neq 1$ por Cramer y obtenemos:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}9 & 1 & k+1\\ 20k & -2 & 1\\ 9 & 1 & 2k\end{vmatrix}}{-5\cdot(k-1)}=\frac{-20k^{2}+2k+18}{-5(k-1)}=\frac{2\cdot(10k+9)}{5}\quad;\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 9 & k+1\\ 3 & 20k & 1\\ 1 & 9 & 2k\end{vmatrix}}{-5\cdot(k-1)}=\frac{20k^{2}-47k+27}{-5\cdot(k+1)}=\frac{27-20k}{5}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 9\\ 3 & -2 & 20k\\ 1 & 1 & 9\end{vmatrix}}{-5\cdot(k-1)}=0$$

Resolvemos para $k=-1$.

Observando el menor $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, el sistema equivalente viene dado por las ecuaciones cuyos coeficientes forman parte de dicho menor, esto es

$$\begin{cases} x\;\;+y+2z=9\\ 3x-2y+z=20\end{cases}$$

Las incógnitas principales del sistema son aquellas cuyos coeficientes forman parte de las columnas del menor $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, es decir x e y. La incógnita z actúa como incógnita no principal o parámetro. Así, tenemos:

$z=t;\;\; \begin{cases} x\;\;+y\;\;=9-2t\\ 3x-2y\;=\;20-t\end{cases}\;\;\forall t\in\mathbb{R}$, de donde $\begin{cases} 2x+2y\;=18-4t\\ 3x-2y\;=\;20-t\end{cases}$ y sumando miembro a miembro obtenemos $5x=38-5t$; $x=\frac{38}{5}-t$; sustituyendo este valor en la primera ecuación obtenemos $\frac{76}{5}+2y=18-4t$ y despejando tenemos el valor $y=\frac{7}{5}-t$

La solución viene dada por $\begin{cases} x=\frac{38}{5}-t\\ y=\frac{7}{5}-t\\ z=\;\;t\end{cases}\qquad\forall t\in\mathbb{R}$

<u>Puntuación</u>

1, 2, 3 ,4, 5 ------------ 1’5 puntos
6 ------------------------ 2’5 “