Matemáticas II 2º BC ** Mat-Det-Sist ** Oct-17

1º) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$, calcula $\begin{vmatrix} a-1 & b-2 & 2c-6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix}$ usando las propiedades de los determinantes.

Resolución

$$\begin{vmatrix} a-1 & b-2 & 2c-6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} \overset{P7}{=} \begin{vmatrix} a & b & 2c \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & -2 & -6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix}}_{F_2=-2F_1} \overset{P6}{=} \begin{vmatrix} a & b & 2c \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} \overset{P5}{=} 2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 4 & 6 \\ d & e & f \end{vmatrix} \overset{P5}{=}$$

$$2\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ d & e & f \end{vmatrix} \overset{P2}{=} -4\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -12$$

2º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Calcular el determinante de la matriz A^{20}.
b) Resolver el sistema $AX = O$.

Resolución

a) $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \overset{F_1-2F_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 4\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4$

$|A^{20}| = |A|^{20}$ por la propiedad P10 de los determinantes. Así, $|A^{20}| = |A|^{20} = (-4)^{20} = 2^{40}$

b) El sistema $AX = O$ es homogéneo.
Como $|A| = -4 \neq 0$ tenemos que $rg(A) = 3 = nº\ incógnitas$
El sistema es compatible determinado, la única solución es la trivial $x = y = z = 0$.

3) Una empresa cinematográfica dispone de tres salas, A, B y C. Los precios de entrada a estas salas son de 3, 4 y 5 euros, respectivamente. Un día la recaudación conjunta de las tres salas fue de 720 euros y el número total de espectadores fue de 200. Si los espectadores de la sala A hubieran asistido a la sala B y los de la sala B a la sala A, se hubiese obtenido una recaudación de 20 euros más. Plantea un sistema de ecuaciones lineales para determinar el número de espectadores que acudió a cada una de las salas.

Resolución

Sean x, y, z el número de espectadores de las salas A, B y C respectivamente. Del enunciado, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y + z = 200 \\ 3x + 4y + 5z = 720 \\ 4x + 3y + 5z = 740 \end{cases}$$

Vamos a utilizar el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 3 & 4 & 5 & 720 \\ 4 & 3 & 5 & 740 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2-3\cdot F_1 \\ F_3-4\cdot F_1}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 2 & 120 \\ 0 & -1 & 1 & -60 \end{pmatrix} \underset{F_3+F_2}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 2 & 120 \\ 0 & 0 & 3 & 60 \end{pmatrix}$$

El sistema escalonado equivalente es:

$$\begin{cases} x+y+z=200 \\ \quad y+2z=120 \\ \qquad 3z=60 \end{cases} \quad \text{cuya solución es } z=20; y=8; x=100$$

Por tanto, 100 espectadores en la sala A, 80 en la B y 20 en la C.

4º) Determinar, en función de a, el valor del determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & a \\ a & a & 1 & 1 \\ a & 1 & a & 1 \end{vmatrix}$

Resolución

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & a \\ a & a & 1 & 1 \\ a & 1 & a & 1 \end{vmatrix} \overset{C_1+C_2+C_3+C_4}{\triangleq} \begin{vmatrix} 2+2a & 1 & a & a \\ 2+2a & 1 & 1 & a \\ 2+2a & a & 1 & 1 \\ 2+2a & 1 & a & 1 \end{vmatrix} = (2+2a)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & a & a \\ 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{vmatrix} \overset{F_4-F_1}{\triangleq}$$

$$= 2\cdot(1+a)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & a & a \\ 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a \end{vmatrix} \overset{Desarrollo\ por\ 4^a\ Fila}{\triangleq} 2\cdot(1+a)\cdot(1-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} \overset{F_2-F_1}{\triangleq}$$

$$2\cdot(1+a)\cdot(1-a)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1-a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = -2\cdot(1+a)\cdot(1-a)^2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = 2\cdot(1+a)\cdot(1-a)^3$$

5º) Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) Determinar para qué valores de m la matriz A tiene inversa.

b) Para $m=-1$, resolver la ecuación matricial $AX=B+2X$

Resolución

a) $A\ tiene\ inversa\ A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 2 \end{vmatrix} = m^2-2 \quad ; \quad m^2-2=0 \Leftrightarrow m=\pm\sqrt{2}$$

$$A\ tiene\ inversa\ A^{-1} \Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm\sqrt{2} \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

b) $m=-1$. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$AX=B+2X \Leftrightarrow AX-2X=B \Leftrightarrow (A-2I)X=B \Leftrightarrow (A-2I)^{-1}(A-2I)X=(A-2I)^{-1}B$$

$$X=(A-2I)^{-1}\cdot B$$

Llamando $P=A-2I$, tenemos que $X=P^{-1}\cdot B$

Calculamos la inversa de $P=A-2I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Como $|P|=\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \overset{F_2-F_1}{\triangleq} \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, existe P^{-1}

$P_{11}=\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=2$; $P_{12}=-\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=-2$; $P_{13}=\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-1$

$P_{21}=-\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-1$; $P_{22}=\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=2$; $P_{23}=-\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$

$P_{31}=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}=-2$; $P_{32}=-\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=3$; $P_{33}=\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=2$

Matriz adjunta de P: $Adj(P) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Matriz inversa de P: $P^{-1} = \frac{1}{|P|} \cdot (Adj(P))^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

Por tanto, $X = P^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

6º) Considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} ax + y + 4z = 1 \\ -x + ay - 2z = 1 \\ y + z = a \end{cases}$$

Discute el sistema según los valores del parámetro a y resuelve cuando sea posible.

Resolución

Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 4 \\ -1 & a & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz ampliada con la columna de términos independientes: $A^* = \begin{pmatrix} a & 1 & 4 & 1 \\ -1 & a & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 4 \\ -1 & a & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 4 + 2a + 1 = a^2 + 2a - 3$$

$$|A| = 0 \iff a^2 + 2a - 3 = 0 \iff \begin{cases} a = 1 \\ a = -3 \end{cases}$$

Caso 1 $\forall a \in \mathbb{R}$ $a \neq -3, a \neq 1$ $|A| \neq 0$ y, por tanto, $rg(A) = 3 = rg(A^*) = nº\ incógnitas$

$$Sistema\ Compatible\ Determinado\ (Solución\ única)$$

Resolvemos por Cramer, obteniendo

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & a & -2 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(a-1)\cdot(a+3)} = \frac{-(a-1)\cdot(4a+5)}{(a-1)\cdot(a+3)} = \frac{-4a-5}{a+3} \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix}}{(a-1)\cdot(a+3)} = \frac{2a^2-3a+1}{(a-1)\cdot(a+3)} = \frac{(a-1)(2a-1)}{(a-1)\cdot(a+3)} = \frac{2a-1}{a+3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}}{(a-1)\cdot(a+3)} = \frac{a^3-1}{(a-1)\cdot(a+3)} = \frac{(a-1)\cdot(a^2+a+1)}{(a-1)\cdot(a+3)} = \frac{a^2+a+1}{a+3}$$

Caso 2 $a = -3$. En este caso $|A| = 0$ y $rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -27 - 1 - 3 + 3 = -28 \neq 0$ y, por tanto, $rg(A^*) = 3$

$$2 = rg(A) \neq rg(A^*) = 3.\ \ Sistema\ Incompatible, no\ tiene\ solución$$

Caso 3 $a = 1$. En este caso $|A| = 0$ y $rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la primera fila y cuarta columna de A^* :

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_3 = 2\cdot C_1}{\triangleq} 0$ y, por tanto, $rg(A^*) = 2$

$rg(A) = rg(A^*) = 2 < nº\ incógnitas. Sistema\ Compatible\ Indeterminado.$

Resolvemos para $a = 1$.

Observando el menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, el sistema equivalente viene dado por las ecuaciones cuyos coeficientes forman parte de dicho menor, esto es $\begin{cases} -x + y - 2z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$

Las incógnitas principales del sistema son aquellas cuyos coeficientes forman parte de las columnas del menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, es decir x e y. La incógnita z actúa como incógnita no principal o parámetro. Así, tenemos:

$z = t;\quad \begin{cases} -x + y = 1 + 2t \\ y = 1 - t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$, de donde $x = 1 - t - (1 + 2t) = -3t$;

La solución viene dada por $\begin{cases} x = -3t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Puntuación

1, 3, 4 ------------ 1 punto
2, 5 --------------- 2 “
6 ------------------ 3 “