Tema 8: Estudio y representación de funciones

1. Introducción

El objetivo de esta unidad es representar gráficamente funciones polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales y logarítmicas sencillas, para lo que, en primer lugar, tenemos que estudiar cómo se comportan en su dominio de definición. La mayor parte del estudio a realizar ya lo hemos visto en unidades anteriores y ahora lo completaremos con algunas características que se pueden determinar.

2. Estudio y representación de una función

El guión que vamos a utilizar en el estudio y representación de una función $y = f(x)$ será el siguiente:

1] Dominio de definición. **2] Cortes con los ejes coordenados.** **3] Simetría.** **4] Regiones** **5] Monotonía.** **6] Extremos.**	**7] Curvatura.** **8] Puntos de inflexión.** **9] Asíntotas.** **10] Periodicidad.** **11] Representación gráfica.**

Vamos a ver cada uno de esos puntos y los aplicaremos a modo de primer ejemplo a la función

$$\boldsymbol{y = f(x) = \frac{x+1}{x-2}}$$

2.1 Dominio de definición

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} / \ y = f(x) \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo: $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$; $x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2$; $Dom(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

2.2 Cortes con los ejes coordenados

Cortes con el eje OX: Hacemos $y = f(x) = 0$ y resolvemos la ecuación. Los valores obtenidos, si existen, $x_1, \dots, x_n$ determinan las abscisas de los puntos de corte con dicho eje:

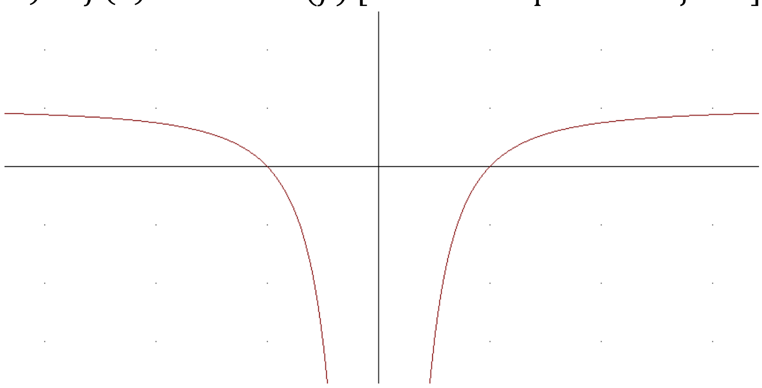
$$P_1(x_1, 0), \dots, P_n(x_n, 0)$$

Corte con el eje OY: Hacemos $x = 0$ y calculamos $y = f(0)$ si es posible, en cuyo caso obtenemos el corte en el punto $P(0, y)$.

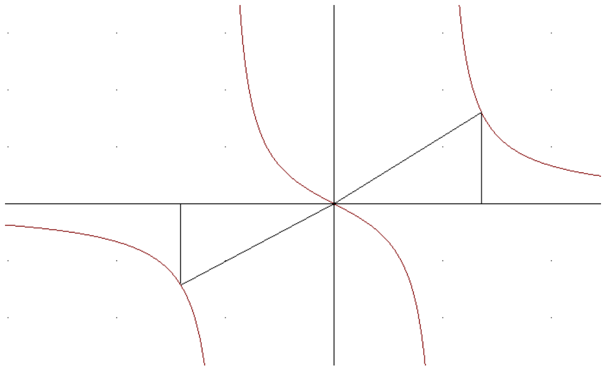
Ejemplo: $f(x) = \frac{x+1}{x-2} \begin{cases} x = 0 \Longrightarrow y = \frac{-1}{2}; \quad P\left(0, \frac{-1}{2}\right) \\ y = 0 \Longrightarrow \frac{x+1}{x-2} \Longrightarrow x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1; \quad Q(-1, 0) \end{cases}$

2.3 Simetría

• $f(x)$ es **par** $\equiv f(-x) = f(x) \ \ \forall x \in Dom(f)$ [Simetría respecto del eje OY]



• $f(x)$ es **impar** $\equiv f(-x) = -f(x)\ \forall x \in Dom(f)$ [Simetría respecto del origen de coordenadas]



2.4 Regiones

Las regiones se corresponde con determinar el signo de la función en su dominio.

Ejemplo: $f(x) = \frac{x+1}{x-2}\begin{cases} < 0 \\ > 0 \end{cases}$ Resolvemos las inecuaciones calculando raíces y polos:

$$x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1 \quad , \quad x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2$$

La recta real queda dividida en tres intervalos, $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$ y $(2, +\infty)$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, +\infty$
Signo de $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$	$+$	$-$	$+$

Así, quedan determinadas las regiones de la gráfica de la función (en blanco)

2.5 Monotonía

Se trata de estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento mediante el signo de la primera derivada.

$$f'(x) > 0 \ en\ I \Longrightarrow f(x) \text{ creciente } en\ I$$
$$f'(x) < 0 \ en\ I \Longrightarrow f(x) \text{ decreciente } en\ I$$

Ejemplo: $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$; $f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0$ en $Dom(f)$. Por tanto f es decreciente en su dominio

2.6 Extremos

Para determinar los extremos de la función podemos utilizar el resultado del apartado anterior o el criterio de la segunda derivada:

$$f'(x_0) = 0 \ y \begin{cases} f''(x_0) > 0 \Longrightarrow Mínimo\ relativo \\ f''(x_0) < 0 \Longrightarrow Máximo\ relativo \end{cases} \quad \text{en } x_0$$

Ejemplo: $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$; Como f es decreciente en su dominio, no tiene extremos.

2.7 Curvatura

Se trata de estudiar los intervalos de concavidad y convexidad mediante el signo de la segunda derivada.

$$\begin{cases} f''(x) > 0 \ en\ I \Longrightarrow f(x) \text{ cóncava } en\ I \\ f''(x) < 0 \ en\ I \Longrightarrow f(x) \text{ convexa } en\ I \end{cases}$$

Ejemplo: $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$; $f'(x)=\frac{-3}{(x-2)^2}$; $f''(x)=\frac{6}{(x-2)^3}\begin{cases}>0\\<0\end{cases}$

Resolvemos las inecuaciones:

$$(x-2)^3=0\Longrightarrow x=2$$

La recta real queda dividida en dos intervalos, $(-\infty,2)$ y $(2,+\infty)$

	$(-\infty,2)$	$(2,+\infty)$
Signo de $f''(x)=\frac{6}{(x-2)^3}$	$-$	$+$

$f(x)$ convexa en $(-\infty,2)$ y cóncava en $(2,+\infty)$

2.8 Puntos de inflexión

Para determinar los puntos de inflexión de la función podemos utilizar el resultado del apartado anterior o el criterio de la tercera derivada:

$$\left.\begin{array}{r} f(x)\ derivable\ en\ x_0\ tres\ veces \\ f''(x_0)=0\ y\ f'''(x_0)\neq 0 \end{array}\right\}\Longrightarrow f(x)\ tiene\ un\ punto\ de\ inflexión\ en\ x_0$$

Ejemplo: $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$

$f(x)$ convexa en $(-\infty,2)$ y cóncava en $(2,+\infty)$

No existen puntos de inflexión puesto que $f(x)$ no está definida en $x=2$.

2.9 Asíntotas

2.9.1 Asíntotas verticales

La recta $\boldsymbol{x=a}$ es **asíntota vertical** de la función $y=f(x)\equiv$ alguno de los límites laterales en el punto es infinito: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$ o $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$.

En las asíntotas verticales nosotros tenemos que aportar los valores de a para los cuales calcular los límites.

Una función puede tener no tener o tener varias asíntotas verticales.

2.9.2 Asíntotas horizontales

La recta $\boldsymbol{y=b}$ es **asíntota horizontal** de la función $y=f(x)\equiv$ alguno de los límites laterales en el infinito es b: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ o $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$. $(b\in\mathbb{R})$

En las asíntotas horizontales planteamos siempre los mismos límites y el resultado es el que nos dice si existen o no.

Una función puede tener, a lo sumo, dos asíntotas horizontales.

2.9.2 Asíntotas oblicuas

Las **asíntotas oblicuas** de una función son rectas oblicuas, es decir, rectas de la forma

$$\boldsymbol{y=mx+n}\quad,\quad \text{con } m\neq 0$$

Una función puede tener, como máximo, dos asíntotas oblicuas distintas (una por la izquierda de su gráfica y otra por la derecha de la misma). El cálculo de las mismas se realiza así:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x};\ \ si\ m\in\mathbb{R}-\{0\}\ \ entonces\ n=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx]$$

Las funciones polinómicas no tiene asíntotas.

Las funciones que nosotros estudiaremos tendrán, a lo sumo, una asíntota horizontal o una oblicua.

Ejemplo: $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$

Como $\lim\limits_{x\to2}\frac{x+1}{x-2}\overset{\frac{3}{0}}{=}\begin{cases}\lim\limits_{x\to2^-}\frac{x+1}{x-2}\overset{\frac{3}{0^-}}{=}-\infty\\ \lim\limits_{x\to2^+}\frac{x+1}{x-2}\overset{\frac{3}{0^+}}{=}+\infty\end{cases}$ la recta $x=2$ es asíntota vertical.

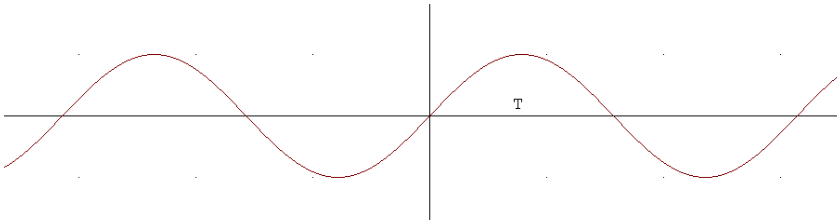
Como $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x+1}{x-2} = 1$ la recta $y = 2$ es asíntota horizontal.

No hay asíntota oblicua porque $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x+1}{x^2-2x} = 0$

2.10 Periodicidad

Una función $f(x)$ es **periódica** de periodo $T \equiv f(x+T) = f(x)\ \forall x \in Dom(f)$

Son conocidas la periodicidad de las funciones trigonométricas; por ejemplo, la función $f(x) = senx$ es periódica de periodo $T = 2\pi$:

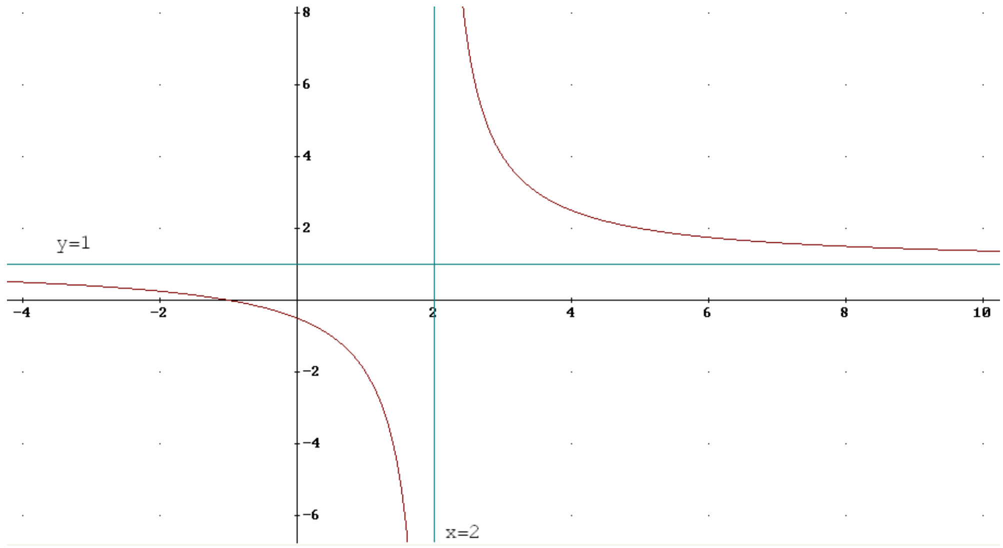


La función del ejemplo $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ no es periódica.

2.11 Representación gráfica

La información obtenida en los puntos anteriores la utilizamos para representar la gráfica de la función con exactitud dibujando las asíntotas y los puntos significativos que han aparecido.

Ejemplo: $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$



Ejemplo 2

Vamos a estudiar y representar gráficamente la función polinómica $y = f(x) = x^4 - x^2$

Resolución

1] Dominio $Dom(f) = \mathbb{R}$ por ser polinómica.

2] Cortes con los ejes

$$\text{Eje } OX: y = 0 \Leftrightarrow x^4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ x^2 - 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

Los puntos de corte con el eje OX son $O(0,0)$, $A(-1,0)$ y $B(1,0)$

$O(0,0)$ es el corte con el eje OY

3] Simetrías

$$f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 = x^4 - x^2 = f(x)$$

La función es par, simétrica respecto del eje de ordenadas.

4] Regiones (signo de la función)

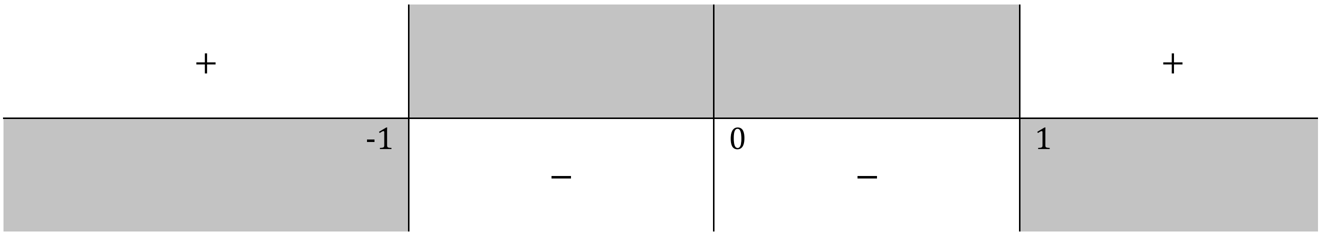
Se trata de resolver las inecuaciones $f(x) = x^4 - x^2 \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$

$$x^4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ x^2 - 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

Estos valores dividen la recta real en cuatro intervalos en los que determinamos el signo:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1$	$(1, +\infty)$
Signo de $f(x) = x^4 - x^2$	$+$	$-$	$-$	$+$

Así, quedan determinadas las regiones de la gráfica de la función (en blanco)



5] Monotonía (signo de f')

Se trata de resolver las inecuaciones $f'(x) = 4x^3 - 2\text{x} \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$

$$4x^3 - 2\text{x} = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot (2x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ 2x^2 - 1 \Leftrightarrow x = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

La recta real queda dividida en cuatro intervalos:

	$(-\infty, -\sqrt{2}/2)$	$(-\sqrt{2}/2, 0)$	$(0, \sqrt{2}/2)$	$(\sqrt{2}/2, +\infty)$
Signo de $f'(x) = 4x^3 - 2\text{x}$	$-$	$+$	$-$	$+$

La función $f(x) \begin{cases} decrece\ en\ (-\infty, -\sqrt{2}/2) \cup (0, \sqrt{2}/2) \\ crece\ en\ (-\sqrt{2}/2, 0) \cup (\sqrt{2}/2, +\infty) \end{cases}$

6] Extremos

La información obtenida en el apartado anterior nos permite determinar los extremos:
Los puntos $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ y $Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ son mínimos relativos y el punto $O = (0,0)$ máximo relativo donde $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

7] Curvatura (signo de f'')

Se trata de estudiar los intervalos de concavidad y convexidad mediante el signo de la segunda derivada.

$$f''(x) = 12x^2 - 2 \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$$

Resolvemos las inecuaciones:

$$12x^2 - 2 = 0 \Longrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{6}}{6}$$

La recta real queda dividida en tres intervalos, $(-\infty, 2)$ y $(2, +\infty)$

	$(-\infty, -\sqrt{6})/6)$	$(-\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/6)$	$(\sqrt{6}/6, +\infty)$
Signo de $f''(x) = 12x^2 - 2$	$+$	$-$	$+$

$$f(x) \text{ cóncava en } (-\infty, -\sqrt{6}/6) \cup (\sqrt{6}/6, +\infty)$$
$$f(x) \text{convexa en } (-\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/6)$$

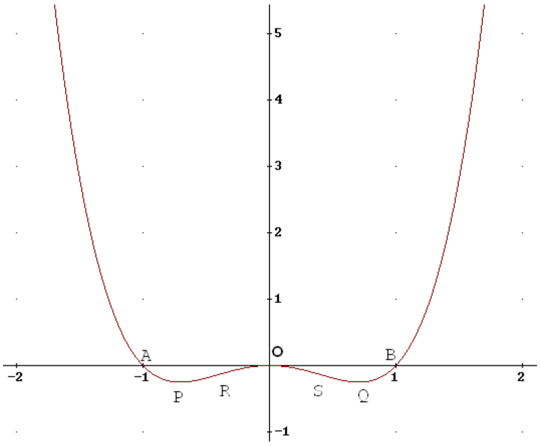
8] Puntos de inflexión

Los cambios de curvatura se producen en los puntos $R\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{5}{36}\right)$ y $S\left(\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{5}{36}\right)$ donde $f\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)=f\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)=-\frac{5}{36}$

9] Asíntotas

No tiene por ser función polinómica.

10] Representación gráfica



Ejemplo 3

Estudiamos y representamos gráficamente la función $y=f(x)=\frac{x}{x^2-16}$

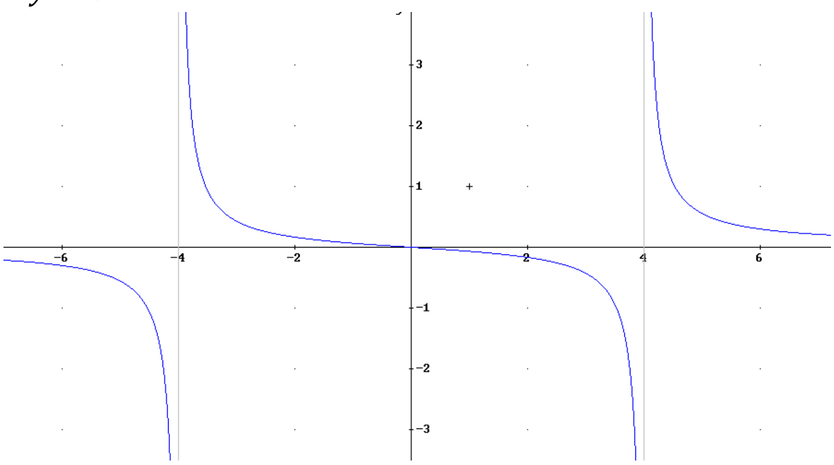
Damos la solución de cada apartado y el alumno debe llegar a ella.

Solución

- Dominio: $D=\mathbb{R}-\{-4,4\}$
- Simetrías: Impar
- Cortes con los ejes: $A(0,0)$
- Regiones: $\begin{cases} y>0 & (-4,0)\cup(4,+\infty) \\ y<0 & (-\infty,-4)\cup(0,4) \end{cases}$
- $y' = \frac{-(x^2+16)}{(x^2-16)^2} < 0 \; en \; D. \; Decreciente \; en \; D$
- Extremos: No tiene
- $y'' = \frac{2x^3+96x}{(x^2-16)^3} \begin{cases} >0 & (-4,0)\cup(4,+\infty) & Cóncava \\ <0 & (-\infty,-4)\cup(0,4) & Convexa \end{cases}$
- Puntos de inflexión: $A(0,0)$
- Asíntotas:

  Verticales: $x=-4$ y $x=4$

  Horizontal: $y=0$



Ejemplo 4

Estudiamos y representamos gráficamente la función $y = f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+2}$

Damos la solución de cada apartado y el alumno debe llegar a ella.

Solución

• Dominio: $D = \mathbb{R} - \{-2\}$

• Simetrías: No tiene

• Cortes con los ejes: $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y $B(1,0)$

• Regiones: $\begin{cases} y > 0 & (-2, +\infty) \\ y < 0 & (-\infty, -2) \end{cases}$

• $y' = \frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2} \begin{cases} > 0 & (-\infty, -5) \cup (1, +\infty) \quad Creciente \\ < 0 & (-5, -2) \cup (-2, 1) \quad Decreciente \end{cases}$

• Extremos:

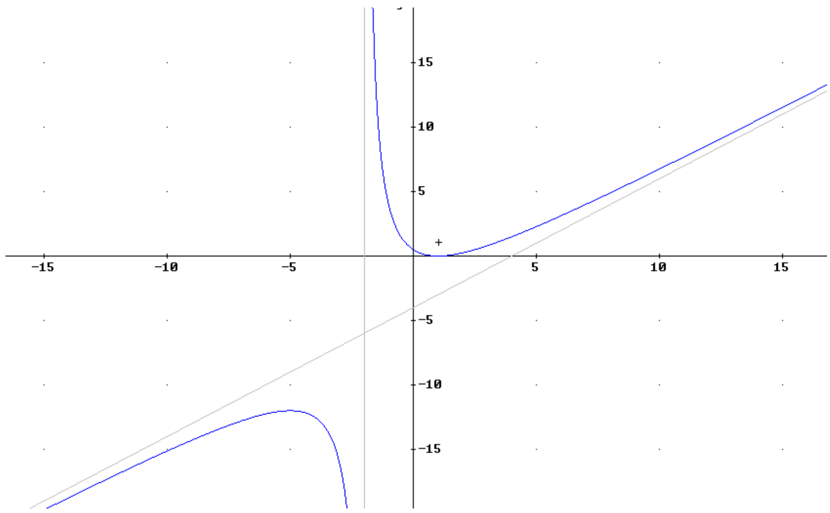
Máximo en $C(-5, -12)$

Mínimo en $D(1,0)$

• $y'' = \frac{18}{(x+2)^3} \begin{cases} > 0 & (-2, +\infty) \quad Cóncava \\ < 0 & (-\infty, 2) \quad Convexa \end{cases}$

• Puntos de inflexión: No tiene

• Asíntotas: Vertical: $x = -2$ Oblicua: $y = x - 4$



Ejemplo 5

Estudiamos y representamos gráficamente la función $y = f(x) = e^{x^2-4x}$

Damos la solución de cada apartado y el alumno debe llegar a ella.

Solución

• Dominio: $D = \mathbb{R}$

• Simetrías: No tiene

• Cortes con los ejes: $A(0,1)$

• Regiones: $y > 0$ en D

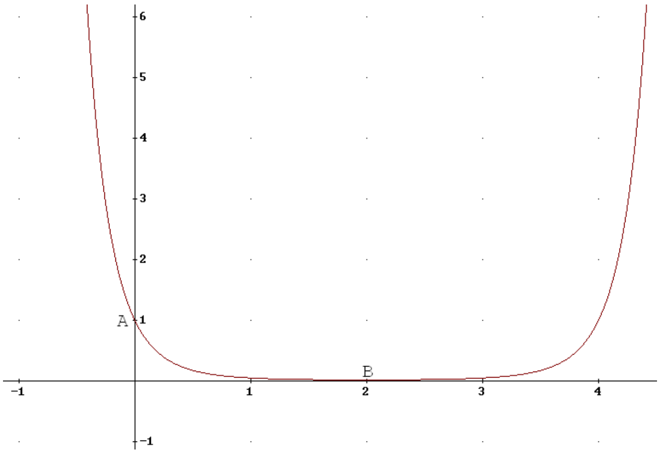
• $y' = e^{x^2-4x} \cdot (2x-4) \begin{cases} > 0 & (2, +\infty) \quad Creciente \\ < 0 & (-\infty, 2) \quad Decreciente \end{cases}$

• Extremos:

Mínimo en $B\left(2, \frac{1}{e^4}\right)$

• $y'' = e^{x^2-4x} \cdot [(2x-4)^2 + 2] > 0 \; en \; D. Cóncava \; en \; D$

• Puntos de inflexión: No tiene
• Asíntotas: No tiene



Ejemplo 6

Estudiamos y representamos gráficamente la función $y = f(x) = y = L(x^2 - 1)$
Damos la solución de cada apartado y el alumno debe llegar a ella.

Solución

• Dominio: $D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
• Simetrías: Par
• Cortes con los ejes: $\text{A}\left(-\sqrt{2}, 0\right)$ y $\text{B}\left(\sqrt{2}, 0\right)$
• Regiones: $\begin{cases} y > 0 & \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right) \\ y < 0 & \left(-\sqrt{2}, -1\right) \cup \left(1, \sqrt{2}\right) \end{cases}$
• $y' = \frac{2x}{x^2-1} \begin{cases} > 0 \ (1, +\infty) & Creciente \\ < 0 \ (-\infty, -1) & Decreciente \end{cases}$
• Extremos: No tiene
• $y'' = \frac{-2\cdot(x^2+1)}{(x^2-1)^2} < 0\ en\ D. Convexa\ en\ D$
• Puntos de inflexión: No tiene
• Asíntotas:

Verticales: $x = -1$ y $x = 1$