Tema 7: Aplicaciones de la derivada

1. Introducción

En la unidad anterior hemos establecido el concepto de derivada de una función $f(x)$ en un punto x_0 de su dominio y la hemos interpretado geométricamente como la pendiente de la **recta** t **tangente** a la curva $y = f(x)$ en el punto $P\big(x_0, f(x_0)\big)$:

$$t \equiv y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

La **recta** n **normal** a la curva $y = f(x)$ en el punto $P\big(x_0, f(x_0)\big)$ es la perpendicular a la tangente en dicho punto y su ecuación es:

$$n \equiv y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

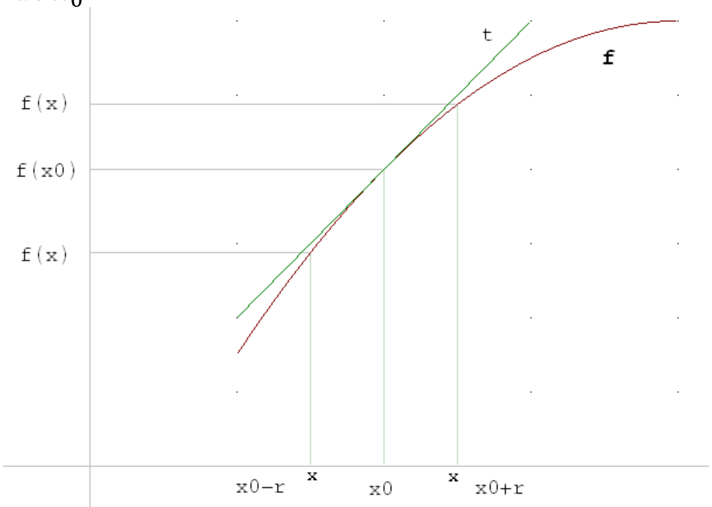
Observemos que el producto de las pendientes de t y n es $t \cdot n = -1$.

En esta unidad vamos a ver las aplicaciones de la derivada en el estudio de propiedades locales y globales de funciones reales de variable real como son crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos, concavidad, convexidad y puntos de inflexión así como en la resolución de problemas de optimización.

2. Monotonía de una función

La idea gráfica que todos tenemos de una función que crece en un punto es la de una representación que sube en nuestro sentido de escritura de izquierda a derecha.

Formalmente, una función $f(x)$ es estrictamente creciente en un punto x_0 de su dominio si y solo si existe un intervalo centrado en él $(x_0 - r, x_0 + r)$ tal que para los valores x del intervalo a la izquierda de x_0, se tiene $f(x) < f(x_0)$, y $f(x) > f(x_0)$ para los valores x del intervalo a la derecha de x_0.



- $f(x)$ es **estrictamente creciente en** $x_0 \equiv$

$$\exists\,(x_0 - r, x_0 + r) / \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \begin{cases} x < x_0 \Longrightarrow f(x) < f(x_0) \\ x > x_0 \Longrightarrow f(x) > f(x_0) \end{cases}$$

Además, si $f(x)$ es derivable en x_0 la pendiente $f'(x_0)$ de la recta t tangente en el punto de abscisa x_0 es positiva:

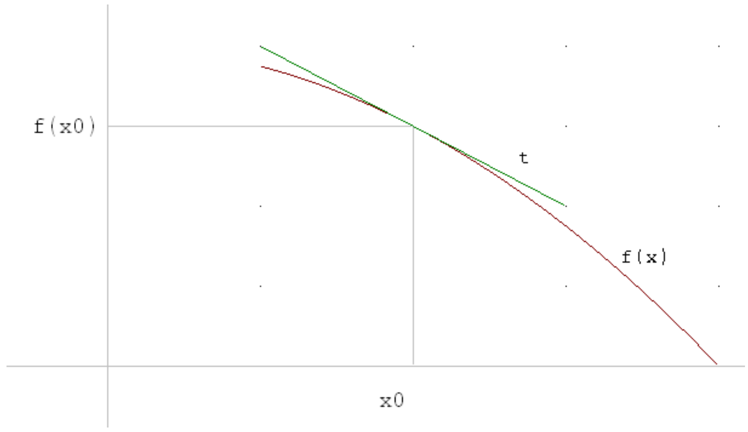
$\boldsymbol{f'(x_0)} > 0 \Longrightarrow f(\boldsymbol{x})$ **estrictamente creciente en** $\boldsymbol{x_0}$

- $f(x)$ es **estrictamente creciente en un intervalo** $I \equiv$

$$\forall x_1, x_2 \in I \;\; x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I} \;\; \boldsymbol{f'(x)} > 0 \;\Longrightarrow f(\boldsymbol{x})$ **estrictamente creciente** ***en I***

De forma análoga definimos decrecimiento de una función:



- $f(x)$ es **estrictamente decreciente en** $x_0 \equiv$

$$\exists\,(x_0 - r, x_0 + r)/\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \begin{cases} x < x_0 \Longrightarrow f(x) > f(x_0) \\ x > x_0 \Longrightarrow f(x) < f(x_0) \end{cases}$$

Además, si $f(x)$ es derivable en x_0, la pendiente $f'(x_0)$ de la recta t tangente en el punto de abscisa x_0 es negativa:

$$\boxed{\boldsymbol{f'(x_0)} < 0 \Longrightarrow f(\boldsymbol{x}) \textbf{ estrictamente decreciente en } \boldsymbol{x_0}}$$

- $f(x)$ es **estrictamente decreciente en un intervalo** $I \equiv$

$$\forall x_1, x_2 \in I \;\; x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

$$\boxed{\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I} \;\; \boldsymbol{f'(x)} < 0 \;\Longrightarrow f(\boldsymbol{x}) \textbf{ estrictamente decreciente } \boldsymbol{en\ I}}$$

Por tanto, para determinar la monotonía de una función debemos estudiar, en general, el signo de la primera derivada.

Ejemplo 1

Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = x^3 - x^2$.

Resolución

Estudiamos el signo de la derivada $f'(x) = 3x^2 - 2x \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$

Resolvemos las inecuaciones de segundo grado. Para ello, en primer lugar, hallamos los valores que anulan la expresión:

$$3x^2 - 2x = 0 \Longrightarrow x \cdot (3x - 2) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2/3 \end{cases}$$

Estos valores dividen la recta real en intervalos, en cada uno de los cuales vamos a determinar el signo de la derivada f' sustituyendo en ella un valor cualquiera de cada uno de ellos:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2/3)$	$(2/3, +\infty)$
Signo de $f'(x) = 3x^2 - 2x$	$+$	$-$	$+$

$f(x)$ crece en el intervalo $(-\infty, 0) \cup (2/3, +\infty)$
$f(x)$ decrece en el intervalo $(0, 2/3)$

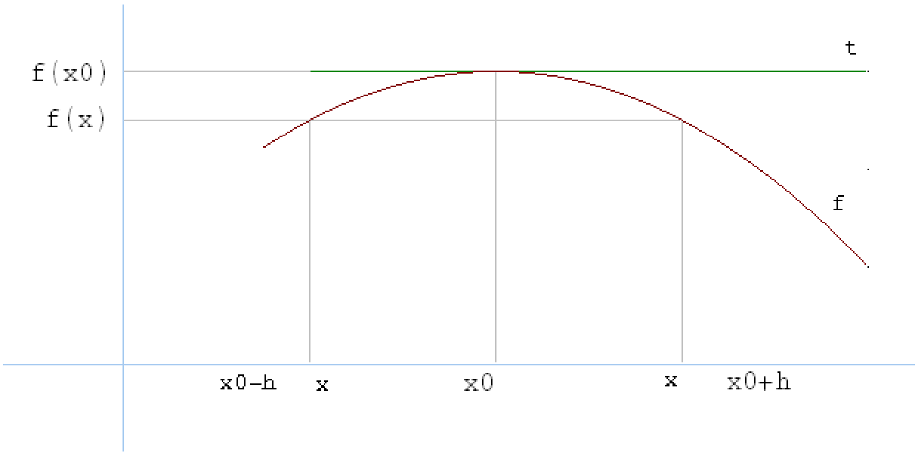
---

3. Extremos de una función

Suponemos una función $f(x)$ continua en un punto x_0.

- $f(x)$ tiene un **máximo relativo en** $x_0 \equiv$

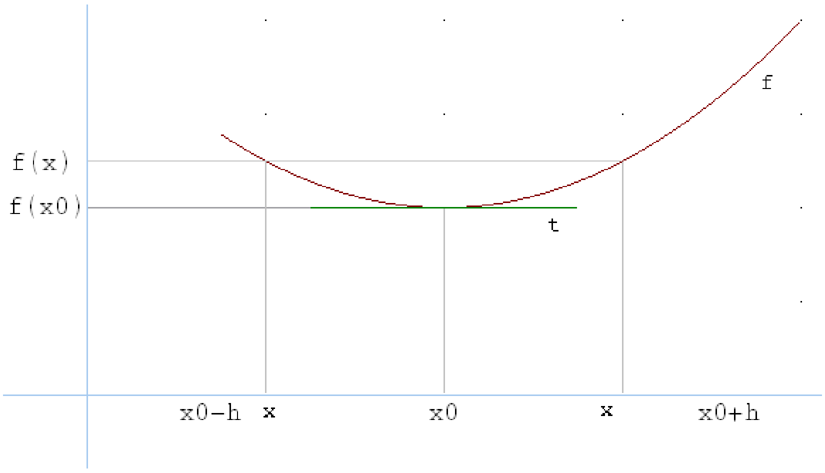
$$\exists\,(x_0 - r, x_0 + r)/\forall\, x \in (x_0 - r, x_0 + r), x \neq x_0 \;\; f(x) < f(x_0)$$



x_0 es el punto de mayor ordenada de entre sus próximos

- $f(x)$ tiene un **mínimo relativo en** x_0 $\equiv$

$$\exists\,(x_0-r,x_0+r)/\forall\,x\in(x_0-r,x_0+r),x\neq x_0\ \ f(x)>f(x_0)$$



x_0 es el punto de menor ordenada de entre sus próximos

Los máximos y mínimos relativos de una función f se llaman **extremos** relativos.
Un resultado importante es el que vemos a continuación.

3.1 Condición necesaria de extremo

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{f(x)\ derivable\ en\ x_0}\\ \boldsymbol{f(x)\ alcanza\ un\ extremo\ en\ x_0}\end{array}\right\}\Rightarrow \boldsymbol{f'(x_0)=0}$$

Demostración

Si fuese $f'(x_0)\neq 0$ entonces $\begin{cases} f'(x_0)>0\Rightarrow f(x)\ crece\ en\ x_0\\ \quad o\\ f'(x_0)<0\Rightarrow f(x)\ decrece\ en\ x_0\end{cases}$ lo que contradice, en ambos casos, la hipótesis de alcanzar un extremo en x_0.

Esta condición nos dice que, necesariamente, la recta tangente a la curva $y=f(x)$ es horizontal, su pendiente $f'(x_0)$ es 0.

El recíproco es falso; la función $f(x)=x^3$ cumple $f'(0)=0$ y, sin embargo, f no tiene extremo en $x_0=0$ al ser creciente en $\mathbb{R}$.

3.2 Condición suficiente de extremo (Criterio de la segunda derivada)

$f(x)$ derivable en x_0 *dos veces*

$$\boldsymbol{f'(x_0)=0\ y}\begin{cases}\boldsymbol{f''(x_0)}>0\Rightarrow \boldsymbol{Minimo\ relativo}\\ \boldsymbol{f''(x_0)}<0\Rightarrow \boldsymbol{Máximo\ relativo}\end{cases}\quad \textbf{en } \boldsymbol{x_0}$$

Demostración

Suponemos $f'(x_0)=0$.

$f''(x_0) > 0 \Longrightarrow f'$creciente en $x_0 \Longrightarrow$ para valores x de un intervalo $(x_0 - r, x_0 + r)$ se tiene $\begin{cases} x < x_0 \Longrightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0 \Longrightarrow f \textit{ decrece a la iquierda de } x_0 \\ x > x_0 \Longrightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0 \Longrightarrow f \textit{ crece a la derecha de } x_0 \end{cases}$ por lo que $f(x)$ alcanza un mínimo relativo en x_0 que es lo que queríamos demostrar.

Análogo a la demostración anterior para $f''(x_0) < 0$.

Los puntos de primera derivada nula se llaman **puntos críticos**. En funciones derivables, los extremos se encuentran entre los puntos críticos.

Ejemplo 2

Determina los extremos de la función $f(x) = x^3 - x^2$ del ejemplo anterior.

Resolución

Por la información del ejemplo 1 tenemos:

		$(-\infty, 0)$	$(0, 2/3)$	$(2/3, +\infty)$
Signo de $f'(x) = 3x^2 - 2x$		$+$ Crece	$-$ Decrece	$+$ Crece

En consecuencia, puesto que $f(x)$ está definida en $x = 0$ y en $x = 1/2$, en el punto $P(0, 0)$, $f(x)$ alcanza un máximo relativo y un mínimo relativo en el punto $Q(2/3, f(2/3))$.
Si no tuviéramos la información del ejemplo 1 utilizamos el criterio de la segunda derivada:
1º) Primera derivada $f'(x) = 3x^2 - 2x$
2º) Segunda derivada $f''(x) = 6x - 2$
3º) Puntos críticos $f'(x) = 3x^2 - 2x = 0 \Longrightarrow x \cdot (3x - 2) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2/3 \end{cases}$
4º) Evaluamos $f''(x)$ en los puntos críticos :

$$f''(0) = -2 < 0 \Longrightarrow \textit{Máximo relativo en } P(0, 0)$$
$$f''(2/3) = 2 > 0 \Longrightarrow \textit{Mínimo relativo en } Q(2/3, f(2/3))$$

3.3 Determinación de extremos absolutos en un intervalo cerrado

Para determinar los extremos absolutos de una función en un intervalo $[a, b]$ es necesario considerar los puntos en los que la derivada se anula o no existe en el abierto (a, b) además de los puntos a y b. Se hallan las imágenes de dichos valores obteniendo el máximo absoluto para la mayor de ellas y el mínimo absoluto para la menor.

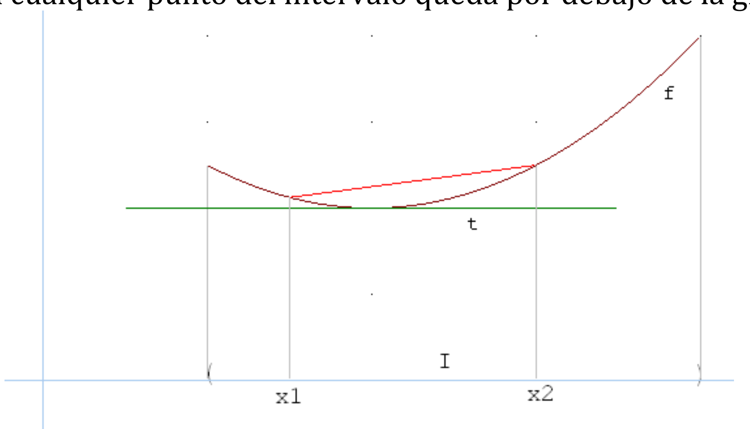
4. Curvatura de una función

4.1 Concavidad y convexidad

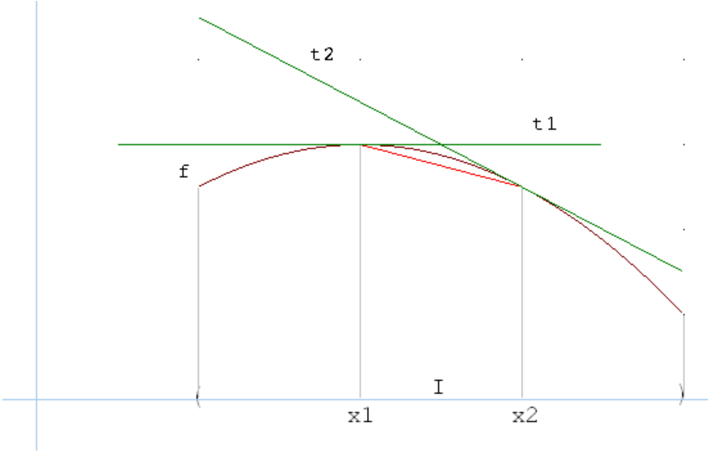
Suponemos una función $f(x)$ continua en un intervalo I.

- $f(x)$ es **cóncava en** $I \equiv \forall x_1, x_2 \in I$, el segmento de extremos $P\big(x_1, f(x_1)\big)$ y $Q\big(x_2, f(x_2)\big)$ queda por encima de la gráfica.

La recta tangente en cualquier punto del intervalo queda por debajo de la gráfica.



- $f(x)$ es **convexa en** $I \equiv \forall x_1, x_2 \in I$, el segmento de extremos $P\big(x_1, f(x_1)\big)$ y $Q\big(x_2, f(x_2)\big)$ queda por debajo de la gráfica.
La recta tangente en cualquier punto del intervalo queda por encima de la gráfica.



Observemos que si f es derivable de orden dos en I y

- f es cóncava en I, las pendientes $f'(x)$ de las sucesivas rectas tangentes en los puntos x del intervalo I van creciendo y, por tanto, $(f')'(x) = f''(x) > 0$.

- f es convexa en I, las pendientes $f'(x)$ de las sucesivas rectas tangentes en los puntos x del intervalo I van decreciendo y, por tanto, $(f')'(x) = f''(x) < 0$.

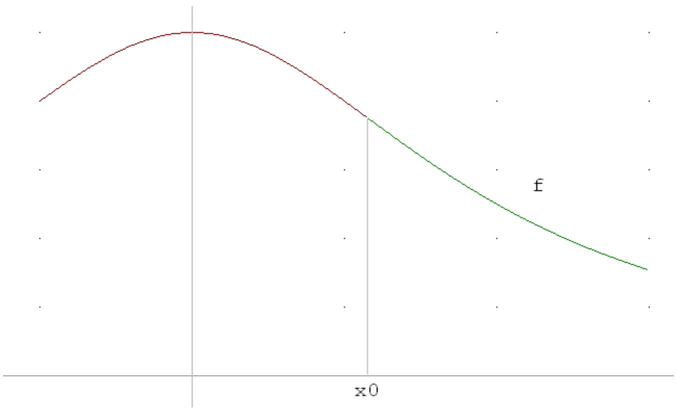
4.2 Condición suficiente de curvatura

El signo de la segunda derivada nos proporciona la condición suficiente de curvatura para funciones derivables en un intervalo I:

$$\boxed{\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I} \begin{cases} \boldsymbol{f''(x)} > 0 \Longrightarrow f(\boldsymbol{x}) \textbf{ cóncava } \boldsymbol{en\ I} \\ \boldsymbol{f''(x)} < 0 \Longrightarrow f(\boldsymbol{x}) \textbf{ convexa } \boldsymbol{en\ I} \end{cases}}$$

4.3 Puntos de inflexión

Una función $f(x)$ tiene un **punto de inflexión** en un punto $x_0 \in Dom(f) \equiv$ la función pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava en dicho punto.



Ejemplo 3

Determina la curvatura y los puntos de inflexión de la función $f(x) = x^3 - x^2$.

Resolución

Estudiamos el signo de la segunda derivada $f''(x) = 6x - 2 \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$

$$6x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 1/3$$

La recta real queda dividida en dos intervalos, $(-\infty, 1/3)$ y $(1/3, +\infty)$

	$(-\infty, 1/3)$	$(1/3, +\infty)$
Signo de $f''(x) = 6x - 2$	$-$ Convexa	$+$ Cóncava

En $x = 1/3$, la función pasa de ser convexa a ser cóncava; por tanto en $x = 1/3$ hay un punto de inflexión, $P\left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{27}\right)$ donde $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-2}{27}$

4.4 Condición necesaria para puntos de inflexión

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{f(x)\ derivable\ en\ x_0\ dos\ veces} \\ \boldsymbol{f(x)\ tiene\ punto\ de\ inflexión\ en\ x_0} \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{f''(x_0) = 0}$$

Demostración

Si $f''(x_0) \neq 0$ entonces $\left\{\begin{array}{l} f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x)\ cóncava\ en\ x_0 \\ \quad o \\ f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x)\ convexa\ en\ x_0 \end{array}\right.$ lo que contradice, en ambos casos, la hipótesis de tener punto de inflexión en x_0.

El recíproco es falso; la función $f(x) = x^4$ cumple $f''(0) = 0$ y, sin embargo, f no tiene punto de inflexión en $x_0 = 0$.

4.5 Condición suficiente para puntos de inflexión (Criterio de la tercera derivada)

$f(x)$ derivable en x_0 tres veces

$f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow f(x)$ tiene un punto de inflexión en x_0

Demostración

Suponemos $f''(x_0) = 0$.

$f'''(x_0) > 0 \Rightarrow f''$creciente en $x_0 \Rightarrow$ para valores x de un intervalo centrado en x_0, $(x_0 - r, x_0 + r)$ se tiene

$\left\{\begin{array}{l} x < x_0 \Rightarrow f''(x) < f''(x_0) = 0 \Rightarrow f\ convexa\ a\ la\ iquierda\ de\ x_0 \\ x > x_0 \Rightarrow f''(x) > f''(x_0) = 0 \Rightarrow f\ cóncava\ a\ la\ derecha\ de\ x_0 \end{array}\right.$ por lo que $f(x)$ tiene un punto de inflexión en x_0 que es lo que queríamos demostrar.

Análogo a la demostración anterior para $f'''(x_0) < 0$.

Ejemplo 4

Determina los puntos de inflexión de la función $f(x) = x^3 - x^2$.

Resolución

Calculamos la segunda derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x \ ; \ f''(x) = 6x - 2$$

Puntos que anulan $f''(x)$:

$$6x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1/3$$

Calculamos la tercera derivada $f'''(x) = 6$ y sustituimos el valor obtenido

$$f'''\left(\frac{1}{3}\right) = 6 \neq 0$$

Según el criterio que hemos estudiado hay un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 1/3$, el punto $P\left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{27}\right)$.

Cuando se anulan las dos primeras derivadas en un punto x_0 es posible decidir si en ese punto hay un extremo o una inflexión con el siguiente criterio:

$$0 = f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1}(x_0) \neq f^{(n}(x_0) \left\{\begin{array}{l} n\ par \left\{ f^{(n}(x_0) \begin{array}{l} > 0 \Rightarrow Mínimo \\ < 0 \Rightarrow Máximo\ en\ x_0 \end{array}\right. \\ n\ impar \Rightarrow Punto\ de\ inflexión \end{array}\right.$$

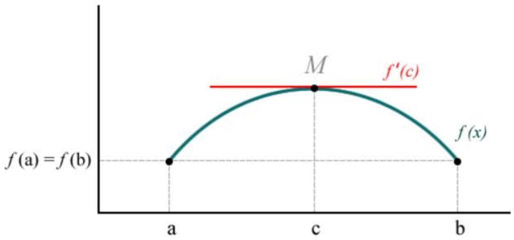
5. Teoremas sobre funciones derivables

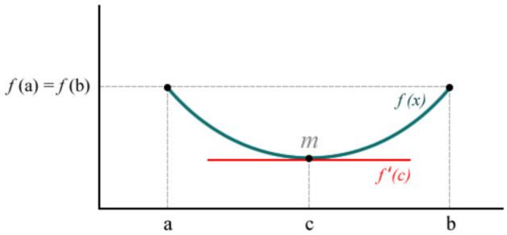
5.1 Teorema de Rolle

$$\left.\begin{array}{c} f(x)\ continua\ en\ [a,b] \\ f(x)\ derivable\ en\ (a,b) \\ f(a)=f(b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists c\in(a,b)\ tal\ que\ f'(c)=0$$

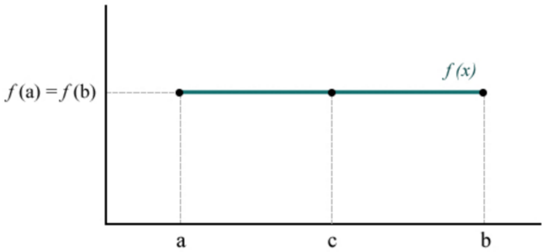
Demostración

Si f es continua en $[a,b]$ entonces alcanza un máximo y un mínimo en dicho intervalo.
Si el máximo (análogo mínimo) está en $c\in(a,b)$ entonces $f'(c)=0$.





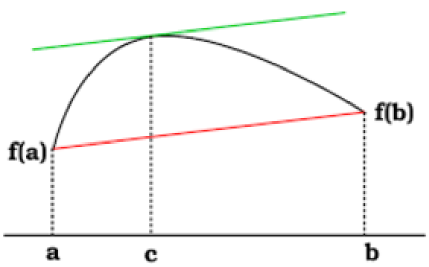
Si los valores máximo y mínimo se alcanzan en los extremos, como $f(a)=f(b)$, se tiene que la función es constante, $f(x)=k$ con $k\in\mathbb{R}$, con los que $f'(c)=0\ \forall c\in\mathbb{R}$.



5.2 Teorema del valor medio de Lagrange

$$\left.\begin{array}{c} f(x)\ continua\ en\ [a,b] \\ f(x)\ derivable\ en\ (a,b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists c\in(a,b)\ tal\ que\ f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

esto es, existe al menos un punto c del intervalo (a,b) en el que la recta tangente a la curva $y=f(x)$ es paralela a la cuerda que une los puntos $\big(a,f(a)\big)$ y $\big(b,f(b)\big)$



Demostración

La ecuación de la recta que pasa por los puntos $\big(a,f(a)\big)$ y $\big(b,f(b)\big)$ es

$$y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$$

Definimos la función auxiliar $g(x)$ que para cada $x\in(a,b)$ mide la distancia entre $f(x)$ y su valor en la secante:

$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$$

$$\left.\begin{array}{c} g(x)\ continua\ en\ [a,b]\ por\ serlo\ f \\ g(x)\ derivable\ en\ (a,b)\ por\ serlo\ f \\ g(a)=g(b) \end{array}\right\} \overset{T.Rolle}{\Longrightarrow} \exists c\in(a,b)\ tal\ que\ g'(c)=0\text{, es decir,}$$

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \; de \; donde \; f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Si la función f representase la ecuación de movimiento de un móvil, este teorema nos dice que en al menos un punto c del intervalo de tiempos $[a,b]$ la velocidad instantánea coincide con la velocidad media en el trayecto $[a,b]$.

5.3 Teorema del valor medio de Cauchy (Generalización del de Lagrange)

$$\left.\begin{array}{c} f(x), g(x) \; continuas \; en \; [a,b] \\ f(x), g(x) derivables \; en \; (a,b) \\ g(a) \neq g(b) \\ g'(x) \neq 0 \; \forall x \in (a,b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists c \in (a,b) \; tal \; que \; \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Demostración

Basta definir la función $G(x) = [g(b)-g(a)] \cdot [f(x)-f(a)] - [f(b)-f(a)] \cdot [g(x)-g(a)]$ y aplicarle el teorema de Rolle.

5.4 Regla de L'H$\hat{o}$pital

Es una aplicación del teorema anterior al cálculo de límites:

$$\left.\begin{array}{c} f \; y \; g \; derivables \; en \; un \; entorno \; de \; a \\ \exists \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = L$$

Si suponemos que $f(a) = g(a) = 0$ entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Se utiliza para calcular indeterminaciones ${}^{0}\!/_{0}$ y, además, de forma reiterada hasta que desaparezca la indeterminación.

También se puede utilizar en

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{0/0}{\cong} \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

6. Problemas de optimización

En muchos problemas nos encontramos con situaciones en las que tenemos que maximizar o minimizar funciones cuyas variables están sujetas a ciertas restricciones. Pensemos, por ejemplo, en aplicaciones en las que hay que determinar el área mínima, el menor coste, el mayor beneficio, etc.

Se tratan de **problemas de optimización** que se pueden resolver utilizando el cálculo diferencial.

En términos generales, un problema de optimización consiste en determinar el valor máximo o mínimo (optimizar) que toma una cierta función, llamada *función objetivo*, así como el valor de las variables que la optimizan, las cuales están sujetas a unas condiciones dadas.

La *solución óptima* es aquella que satisface la restricción del problema y hace que la función objetivo sea máxima o mínima en ellos.

Forma general de un problema de optimización en dos variables x e y:

Optimizar $\boldsymbol{f(x,y)}$ Función objetivo

Sujeto a $\boldsymbol{g(x,y) = k}$ Restricción

6.1 Pasos para resolver un problema de optimización

1. Descripción gráfica, si procede, y definición de las variables que intervienen.
2. Establecer la función objetivo $f(x,y)$.

3. Plantear la ecuación $g(x,y) = k$ que liga las variables.
4. Despejar de la restricción una de las variables, de forma que la expresión resultante sea la más sencilla, y sustituirla en la función objetivo; así, ésta será función en una variable.
5. Encontrar los puntos críticos resolviendo la ecuación $f' = 0$.
6. Aplicar el criterio de la segunda derivada para determinar la solución óptima.
7. Calcular la variable despejada en el punto 4.
8. Responder de forma clara lo que nos pide el problema.

Ejemplo 5

Disponemos de 200 m de tela metálica. Halla las dimensiones del campo rectangular de mayor área posible que se puede cercar con dicha tela.

Planteamiento del problema

Sean x e y las dimensiones, en metros, del campo rectangular (largo y ancho).
La función a maximizar es el área del rectángulo.
El perímetro del campo es $2x + 2y$ que se corresponde con los 200 m de tela disponibles. El problema es:

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{maximizar} & \boldsymbol{A(x,y) = x \cdot y} \\ \boldsymbol{s.a} & \boldsymbol{2x + 2y = 200} \end{array}$$

o equivalentemente:

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{maximizar} & \boldsymbol{A(x,y) = x \cdot y} & \boldsymbol{función\ objetivo} \\ \boldsymbol{s.a} & \boldsymbol{x + y = 100} & \boldsymbol{restricción} \end{array}$$

Resolución

Despejamos una incógnita de relación $x + y = 100$:

$$y = 100 - x \qquad [1]$$

y la sustituimos en la función objetivo, que pasa a ser de una variable:

$$A(x) = x \cdot (100 - x) = 100x - x^2$$

Hallamos los puntos críticos de la función área:

$$A'(x) = 100 - 2x \;\; ; \;\; 100 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 50$$

y comprobamos que se trata de un máximo utilizando el criterio de la segunda derivada:

$$A''(x) = -2 \;\; ; \;\; A''(50) = -2 < 0$$

Por tanto el área máxima se obtiene cuando $x = 50$ metros que al sustituir en [1] nos da el ancho $y = 50$ metros.
Las dimensiones del campo rectangular de mayor área posible, son las de un campo cuadrado de 50 metros de lado y $A = 50^2 = 2500\ m^2$.

Por tanto deben venderse 15 unidades diarias para obtener un beneficio máximo de $B(15) = 87'5$ euros.

Ejemplo 6

El coste de producción de x unidades diarias de un determinado producto viene dado por $C(x) = \frac{1}{4}x^2 + 35x + 25$ *y el de venta de una de ellas es* $\left(50 - \frac{x}{4}\right)$ *euros. Halla el número de unidades que deben venderse diariamente para que el beneficio sea máximo.*

Resolución

El beneficio viene dado por $B(x) = x\left(50 - \frac{x}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25\right) = -\frac{1}{2}x^2 + 15x - 25$

Hallamos el máximo de esta función:

$B'(x) = -x + 15;\; B'(x) = 0 \;\Longrightarrow\; -x + 15 = 0 \;\Longrightarrow x = 15$

$B''(15) = -1 < 0\;$ *máximo* en $x = 15$

Se deben fabricar 15 unidades obteniendo un beneficio máximo de $B(15) = 87'5$ euros.
