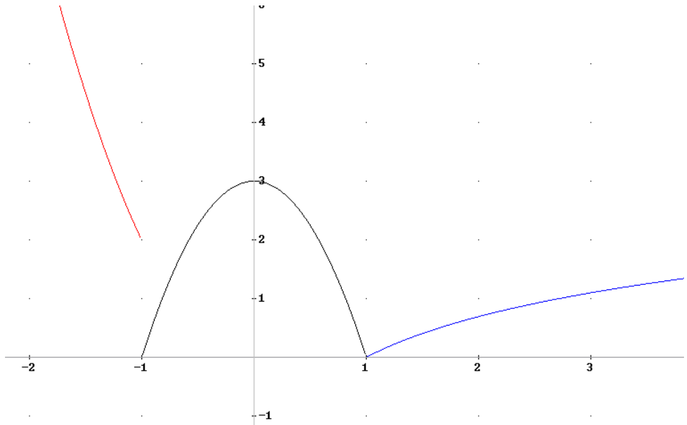
# Tema 5: Continuidad de funciones

## 1. Continuidad de una función en un punto

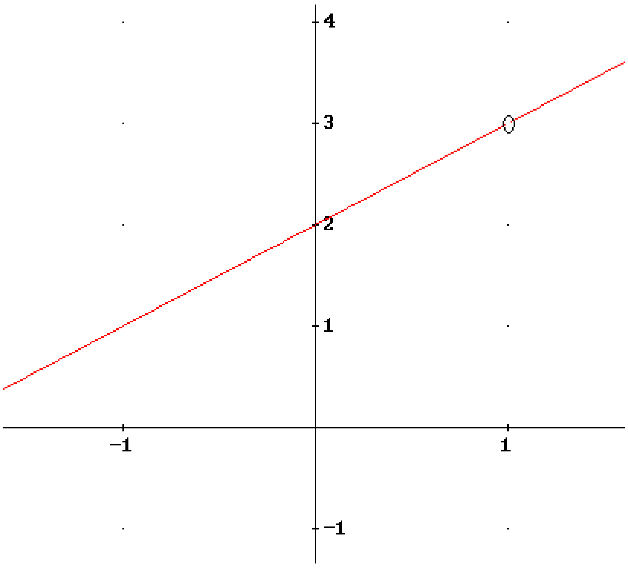
La idea intuitiva de función continua en un punto es bien sencilla, es aquella que "no da saltos ni presenta interrupciones", que se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel. Lo contrario de continua es discontinua. Por ejemplo, la siguiente función es discontinua en el punto de abscisa $x = -1$; si trazásemos una vertical en $x = -1$, no podríamos atravesarla sin levantar el lápiz. En cambio, la función es continua en los demás puntos $x$.



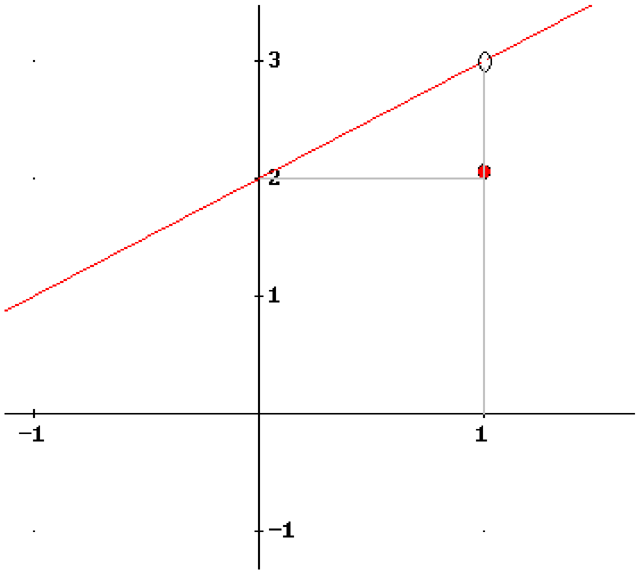
Nos preguntamos por las condiciones que deben darse para que una función $f(x)$ sea continua en un punto $x = a$. Lo haremos con situaciones que producen discontinuidades y que, por tanto, no deben darse.

Las gráficas siguientes, no son continuas en $x = 1$ por motivos diferentes; la primera [1] porque está indefinida en ese punto, no existe $f(1)$ y la segunda [2] porque, aunque si está definida en $x = 1$ y $f(1) = 2$, no coincide ese valor con el límite $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$.

**[1]**



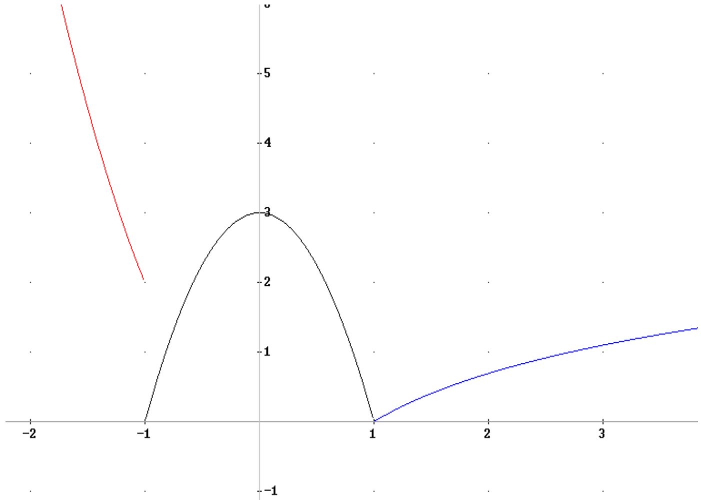
**[2]**

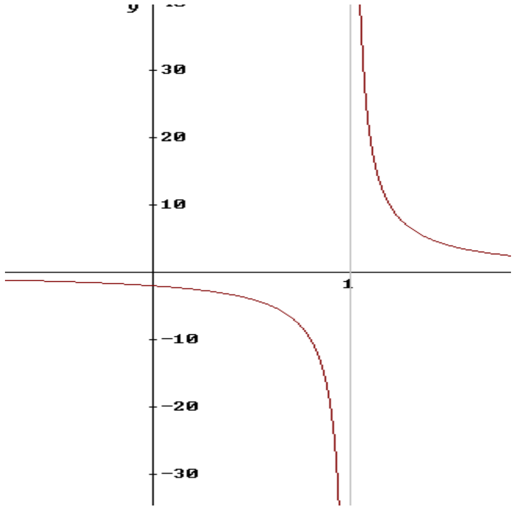


En la gráfica [3] la función no es continua en $x = -1$ porque los límites laterales en ese punto, aunque existen, son distintos, $\lim_{x \to -1^-} f(x) = 2$ y $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 0$.

En la [4], los límites laterales no existen, son infinitos, de ahí la discontinuidad en $x = 1$.

**[3]** **[4]**




Por lo tanto, si queremos que una función sea continua en un punto, no deberán producirse las situaciones anteriores que producen discontinuidades.
La condición necesaria y suficiente para que una función $f(x)$ sea continua en $x = a$ es que se cumplan a la vez:

$$f(x)\ continua\ en\ x = a\ \Leftrightarrow \begin{cases} 1º]\ Existe\ f(a) \\ 2º]\ Existe\ \lim\limits_{x\to a} f(x) \\ 3º]\ f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \end{cases}$$

## 2. Tipos de discontinuidad

Las situaciones gráficas descritas anteriormente muestran que existen distintos tipos de discontinuidades, unas más fuertes que otras, que clasificamos a continuación.

### 2.1 Discontinuidad evitable

La discontinuidad evitable de una función $f(x)$ en un punto $x = a$ se produce cuando no existe $f(a)$ y existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, como en la gráfica [1], o bien cuando existe $f(a)$, existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)\ y\ f(a) \neq \lim\limits_{x\to a} f(x)$, como en la gráfica [2].
En ambos casos, redefiniendo la función en $x = a$ como $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, que es lo que se llama *verdadero valor de la función* en ese punto, se evita la discontinuidad.

### 2.2 Discontinuidad de salto finito

Este tipo de discontinuidad se produce cuando, en un punto $x = a$, los límites laterales existen y son distintos, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -a^+} f(x)$.
La medida del salto es $\left|\lim\limits_{x\to a^-} f(x) - \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right|$.
La gráfica [3] presenta una discontinuidad de este tipo en $x = -1$, con salto 2.

### 2.3 Discontinuidad de salto infinito

Este tipo de discontinuidad se produce cuando, en un punto $x = a$, al menos uno de los límites laterales es infinito:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty\quad o\quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$$

La gráfica [4] presenta una discontinuidad de salto infinito en $x = 1$.

## 3. Continuidad en un intervalo

Una función $f(x)$ es **continua en un intervalo abierto** $(a, b)$ si es continua en todos y cada uno de los puntos del intervalo.
Una función es **continua en un intervalo cerrado** [a, b] si es continua en todos los puntos del intervalo abierto $(a, b)$ y, además, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

Igualmente podemos definir la continuidad en los intervalos semiabiertos.
Las funciones elementales son continuas en sus dominios de definición:
[1] Las funciones polinómicas son continuas en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.
[2] Las funciones racionales $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, cocientes de polinomios, son continuas en $\mathbb{R}$ menos en aquellos valores que anulen el denominador $Q(x)$.
[3] Las funciones exponenciales $f(x) = a^x$, con $a > 0, a \neq 1$ y, en particular, $f(x) = e^x$ son continuas en $\mathbb{R}$.
[4] Las funciones logarítmicas $f(x) = \log_a x$, con $a > 0, a \neq 1$ y, en particular la función logaritmo neperiano $f(x) = Lx$, son continuas en su dominio $(0, +\infty)$.
[5] En las funciones con radicales tendremos en cuenta, además del índice par o impar de la raíz, el tipo de función que sea el radicando. $f(x) = \sqrt{x}$ es continua en $[0, +\infty)$.
[6] En las funciones a trozos se estudiarán con detenimiento aquellos valores en los que la función cambie de definición.
[7] En otros casos tendremos en cuenta que, en un intervalo $[a, b]$, la suma, resta, producto de funciones por números reales y producto de funciones continuas también lo es en dicho intervalo. El cociente de funciones continuas en $[a, b]$, también es continuo en dicho intervalo si la función divisor no se anula en él.
[8] Respecto de la composición de funciones:

$$\begin{cases} f(x) \; continua \; en \; [a,b] \\ g(x) \; continua \; en \; f([a,b]) \end{cases} \Longrightarrow (g \circ f)(x) \; continua \; en \; [a,b]$$

**Resumiendo: Las operaciones con funciones continuas tienen como resultado otra función continua, siempre que tenga sentido la operación.**

---

### Ejemplo 1

Estudia y clasifica los puntos de discontinuidad de la función $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x-1}$

### Resolución

Se trata de una función racional y, por tanto, es continua en el conjunto de los números reales salvo en aquellos valores que anulan el denominador $x - 1$.
$x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1$. En consecuencia $f(x)$continua en $\mathbb{R} - \{1\}$.
Veamos qué tipo de discontinuidad presenta:

$$f(1) \text{ indefinido y } \lim_{x \to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\cdot(x+3)}{x-1} = \lim_{x \to 1}(x+3) = 4$$

Se trata de una discontinuidad evitable en $x = 1$. Verdadero valor de la función en $x = 1$, $f(1) = 4$.

---

### Ejemplo 2

Si $g(x)$ es una función polinómica, ¿qué se puede afirmar sobre la continuidad de la función $f(x) = \frac{g(x)}{x^3-1}$?

### Resolución

La función $f(x)$ dada es un cociente de dos funciones polinómicas, continuas las dos en el conjunto de números reales; por tanto, $f(x)$ será una función continua en todos los puntos en los cuales la operación cociente tenga sentido.

$$x^3 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \sqrt[3]{1} = 1$$

Teniendo en cuenta que el polinomio denominador se anula en $x = 1$, la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

---

## Ejemplo 3

Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & si\ x \leq -1 \\ -3x^2 + 3 & si - 1 < x < 1 \\ Lx & si\ x \geq 1 \end{cases}$ clasificando sus discontinuidades. Represéntala gráficamente.

## Resolución

Se trata de una función a trozos; los valores $x = -1$ y $x = 1$, dividen la definición de la función. Procedemos como sigue:

a) $\forall x \in \mathbb{R}\ x < -1,\ \ f(x) = 2x^2$: continua por ser función polinómica.

$\forall x \in \mathbb{R}\ -1 < x < 1,\ f(x) = -3x^2 + 3$: continua por ser función polinómica.

$\forall x \in \mathbb{R}\ x > 1,\ f(x) = Lx$: continua porque la función logarítmica lo es.

Estudiamos los valores que discriminan la definición de $f$.

Caso 1 $\ x = -1$

1] $f(-1) = 2$

2] $\lim\limits_{x \to -1} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} (2x^2) = 2 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} (-3x^2 + 3\,) = 0 \end{cases}$ Existen pero no coinciden los límites laterales. No existe $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

Discontinuidad de salto finito en $x = -1$, salto 2.

Caso 2 $\ x = 1$

1] $f(1) = L1 = 0$

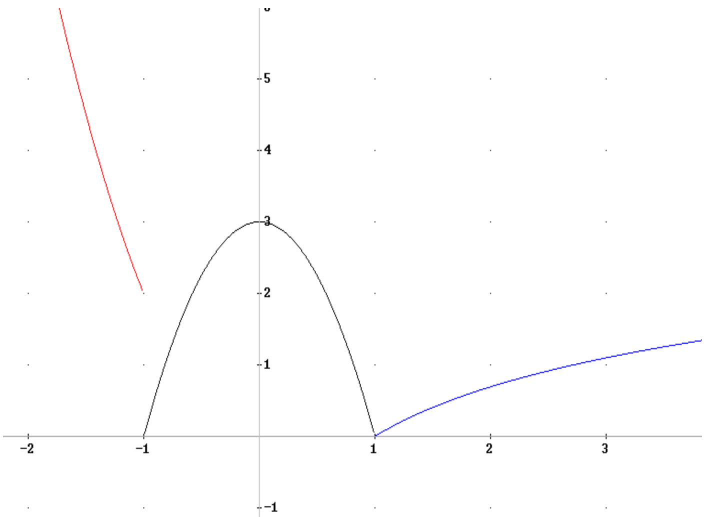
2] $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} (-3x^2 + 3) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (Lx) = 0 \end{cases}$ $\qquad \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$

3] $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$

$f(x)$ continua en $x = 1$

$$f(x) \text{ continua en } \mathbb{R} - \{-1\}$$

Representación gráfica:




## Ejemplo 4

Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{1-x^2} & si\ x \neq 1 \\ \frac{-1}{2} & si\ x = 1 \end{cases}$ clasificando sus discontinuidades

**Resolución**

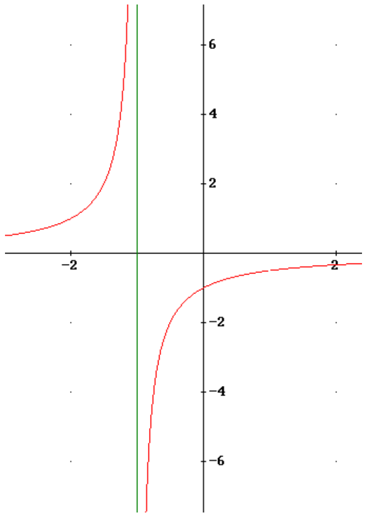
La función $g(x) = \frac{x-1}{1-x^2}$, racional, no es continua en los valores que anulan el polinomio denominador $1 - x^2 = 0$, que son $x = -1$ y $x = 1$. Según está definida $f(x)$ debemos estudiar que ocurre en $x = -1$ (por anular denominador) y $x = 1$ (por tener distinta definición en el valor y en sus proximidades).

Caso 1 $x = -1$

1] $f(-1)$ no definido

2] $\lim_{x \to -1} f(x) \begin{cases} \lim_{x \to -1^-} \frac{x-1}{1-x^2} \overset{\frac{-1}{0^-}}{=} +\infty \\ \lim_{x \to -1^+} \frac{x-1}{1-x^2} \overset{\frac{-1}{0^+}}{=} -\infty \end{cases}$

Los dos límites laterales son infinitos; por tanto la función $f(x)$ presenta una discontinuidad de salto infinito en $x = -1$. La recta $x = -1$ es asíntota vertical




Caso 2 $x = 1$

1] $f(1) = -\frac{1}{2}$

2] $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{1-x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{-(x-1)\cdot(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{-1}{x+1} = -\frac{1}{2}$

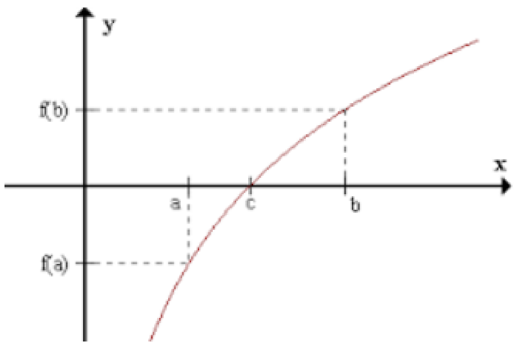
La función $f(x)$ es continua en $x = 1$.

$f(x)$ es continua *en* $\mathbb{R} - \{-1\}$

## 4. Propiedades de una función continua en un intervalo

### 4.1 Teorema de Bolzano

Si $f(x)$ es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y toma valores de signo contrario en sus extremos, entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.



## Ejemplo 4

Comprueba si la siguiente función cumple las hipótesis de teorema de Bolzano en $[-1, 2]$

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 2^{\frac{1}{x}} & si\ x < 0 \\ -x^2 + x + 1 & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Comprueba gráficamente la existencia de un valor real $c \in [-1, 2]$ tal que $f(c) = 0$

### Resolución

$\forall x \in \mathbb{R}\ x < 0,\ f(x) = 1 + 2^{\frac{1}{x}}$ continua por ser suma y composición de continuas.

$\forall x \in \mathbb{R}\ x > 0,\ f(x) = -x^2 + x + 1$ continua por ser función polinómica.

Estudiamos $x = 0$

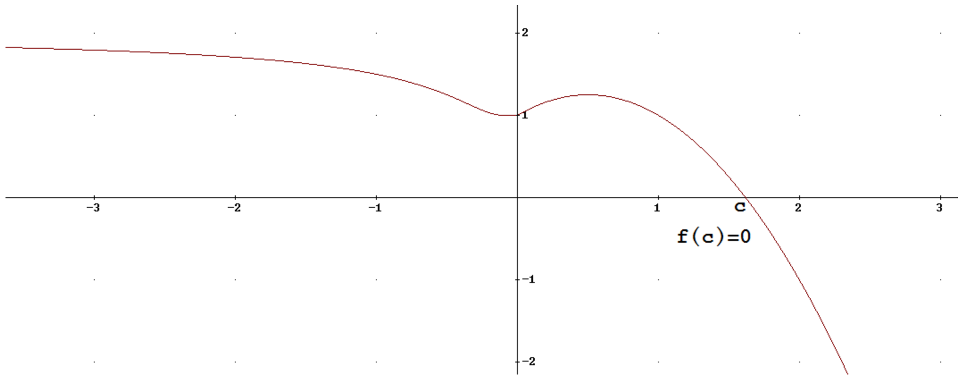
1] $f(0) = 1$

2] $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \left(1 + 2^{\frac{1}{x}}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} (-x^2 + x + 1) = 1 \end{cases}$ Existen y coinciden los límites laterales: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

3] $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

La función es continua en $\mathbb{R}$ y, en particular, en el intervalo cerrado $[-1, 2]$

$$\left.\begin{array}{c} f(x)\ continua\ en\ [-1,2] \\ f(-1) = \dfrac{3}{2} > 0 \\ f(2) = -1 < 0 \end{array}\right\} \overset{T.de\ Bolzano}{\Rightarrow} \exists c \in [-1,2]\ tal\ que\ f(c) = 0$$




## Ejemplo 5

Demuestra que la función $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ tiene al menos un cero en el intervalo $[1, 3]$

### Resolución

La función $f$ es continua en $\mathbb{R}$ por ser polinómica y, en particular, en el intervalo cerrado $[1, 3]$

$$\left.\begin{array}{c} f(x)\ continua\ en\ [1,3] \\ f(1) = -2 < 0 \\ f(3) = 12 > 0 \end{array}\right\} \overset{T.de\ Bolzano}{\Rightarrow} \exists c \in [1,3]\ \ tal\ que\ f(c) = 0$$

El teorema de Bolzano nos ofrece la posibilidad de aproximar las soluciones de una ecuación $f(x) = 0$. Para ello basta con encontrar dos valores para los que $f$ tenga signos distintos y además sea continua en el intervalo que determinan. Dividiendo dicho intervalo en subintervalos, evaluamos la función en sus extremos hasta encontrar valores de signo distinto con lo que la solución se encuentra en dicho subintervalo. El proceso se repite en función de la aproximación que se nos pida.

### 4.2. Teorema de acotación

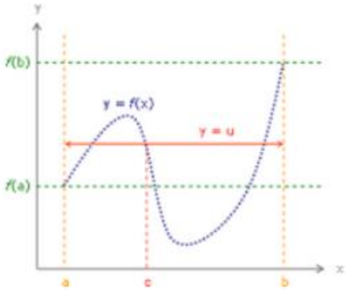
Si $f(x)$ es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces está acotada en $[a, b]$.

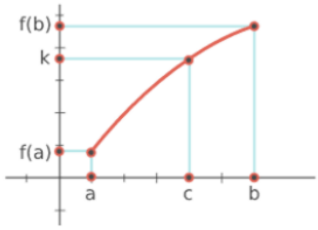
### 4.3. Teorema de Weierstrass

Si $f(x)$ es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces alcanza en $[a, b]$ su máximo $M$ y su mínimo $m$ absolutos.

### 4.4. Teorema de los valores intermedios

Si $f(x)$ es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces toma todos los valores comprendidos entre su mínimo $m$ y su máximo $M$, es decir, para $m < k < M$ existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$. En particular toma todos los valores $k \in \mathbb{R}$ comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$.




---

**Ejemplo 6**

Consideremos una función $f$ continua en el intervalo $[2, 6]$ con $f(2) = 2$ y $f(6) = 10$.

Razonar cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

a) La función $f$ toma todos los valores comprendidos entre 2 y 10. **[ Cierto]**
b) Todos los valores de $f$ están en el intervalo $[2, 10]$. **[Falso]**
c) Existe un valor $c \in (2, 6)$ tal que $f(c) = 2{,}78$. **[Cierto]**
d) La función no tiene ceros en el intervalo $[2, 6]$. [Falso]