Tema 12: Distribuciones de probabilidad

1. Variable aleatoria

Una variable aleatoria X es una función que asocia a cada elemento del espacio muestral E, de un experimento aleatorio, un número real:

$$X: E \longrightarrow \mathbb{R}$$

Ejemplo 1

Consideremos el experimento aleatorio consistente en lanzar 3 monedas al aire. Podemos definir la variable aleatoria $X =$"número de caras obtenido". Esta variable toma los valores del conjunto $\{0,1,2,3\}$.

Se trata de una variable aleatoria **discreta** porque su recorrido es un número finito de valores. Cuando el recorrido está formado por los infinitos números reales de un intervalo hablaremos de variable aleatoria **continua**.

2. Distribución de probabilidad discreta

Una variable aleatoria adquiere todo su significado cuando se asigna a cada valor de la variable la probabilidad de que se verifique al realizar el experimento.

2.1 Función de probabilidad

La **función de probabilidad** de una variable aleatoria discreta es aquella que hace corresponder a cada valor de la variable su probabilidad:

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & [0,1] \\ x_i & \longrightarrow & p_i \end{array}$$

donde p_i es la probabilidad de que la variable aleatoria tome el valor x_i:

$$p(X = x_i) = p_i$$

Ejemplo 2

La función de probabilidad de la variable aleatoria del ejemplo 1, $X =$"Número de caras obtenido al lanzar 3 monedas al aire" es:

$$p(X=0) = \frac{1}{8};\ p(X=1) = \frac{3}{8};\ p(X=2) = \frac{3}{8};\ p(X=3) = \frac{1}{8}$$

2.2 Distribución binomial

Es la más importante de las distribuciones de probabilidad discretas. Corresponde a la realización de un experimento que cumpla las condiciones siguientes:

[1] Únicamente se observa si se cumple un suceso, A (éxito), o si, por el contrario, no se cumple, $\bar{A}$ (fracaso).

[2] La probabilidad del suceso A es constante, es decir, no varía al repetir el experimento.

Si $p(A) = p$ entonces $p(\bar{A}) = 1 - p = q$

La variable aleatoria X que expresa el número de éxitos obtenidos en cada realización del experimento recibe el nombre de **variable de la distribución binomial**. Si se realizan n pruebas del experimento hablaremos de una binomial de parámetros n y p: $X \leadsto B(n,p)$.

Función de probabilidad

La función de probabilidad de una distribución binomial $B(n,p)$ viene dada por la expresión:

$$p(k \text{ éxitos}) = p(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Ejemplo 3

Un examen de opción múltiple está compuesto por 8 preguntas con cuatro respuestas posibles cada una, de las que sólo una es la correcta. Si un alumno responde todas las preguntas al azar, calcula:
a) la probabilidad de que conteste correctamente al menos 7 preguntas.
b) la probabilidad de que no acierte ninguna.

Resolución

Si consideramos la variable X =”número de preguntas acertadas”, se trata de una binomial de parámetros $n = 8$ y $p = \frac{1}{4} = 0'25$, $X \leadsto B(8, 0'25)$. Nos piden:

$p(X \geq 7) = p(X = 7) + p(X = 8) = \binom{8}{7} \cdot 0'25^7 \cdot 0'75 + \binom{8}{8} 0'25^8 \cong 0'00038147$

$p(X = 0) = \binom{8}{0} 0'75^8 \cong 0'100113$

Media, varianza y desviación típica

Si se realizan n pruebas, se puede demostrar que la media, la varianza y la desviación típica son, respectivamente:

$$\mu = n \cdot p \ ; \ \sigma^2 = n \cdot p \cdot q \ ; \ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

3. Distribución de probabilidad continua

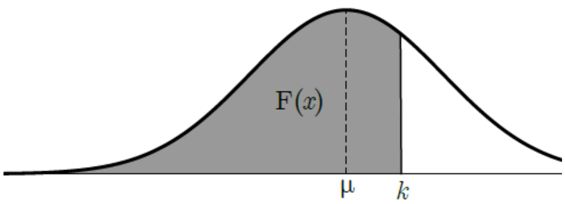
Dada una variable aleatoria continua X, carece de sentido asignar a cada uno de sus valores x_i su correspondiente probabilidad p_i, ya que X puede tomar los infinitos valores de un intervalo. En una distribución continua, la probabilidad de que la variable tome un determinado valor es siempre cero.

Puesto que no es posible definir la función de probabilidad para una variable continua, es preciso introducir un nuevo concepto que la sustituya y que caracterice a la distribución de probabilidad continua, como hacía la función de probabilidad con la discreta. Es así como nace el concepto de **función de densidad**, $f(x)$, que siempre debe cumplir:
[1] $f(x) \geq 0$en todo su dominio.
[2] El área encerrada bajo la curva $f(x)$ vale 1.

3.1 Distribución normal

La distribución normal se caracteriza por tener una función de densidad de probabilidad $f(x)$, cuya representación gráfica tiene forma de campana. Una distribución normal de media μ y desviación típica σ se representa por $N\ (\mu, \sigma\ )$.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



- Su dominio es ℝ.
- Es una función simétrica respecto de la recta $x\ =\ \mu$
- El eje de abscisas es asíntota horizontal.
- Tiene un máximo en $x\ =\ \mu$.
- El área encerrada entre la curva $f(x)$ y el eje de abscisas es 1.

La más sencilla, denominada **normal estándar**, es la normal de media 0 y desviación típica 1, $Z \hookrightarrow N(0{,}1)$, de la cual se han tabulado las probabilidades en una tabla.
Con el manejo de las tablas se pueden calcular probabilidades del tipo $p(Z \leq k)$.

Ejemplo 4

Sea $Z \hookrightarrow N(0{,}1)$. *Calculamos las siguientes probabilidades:*

a) $p(Z > 1{,}32) = 1 - p(Z \leq 1{,}32) = 0{,}0934$

b) $p(Z \geq -1{,}32) = p(Z \leq 1{,}32) = 0{,}9066$

c) $p(1{,}52 < Z < 2{,}03) = p(Z < 2{,}03) - p(Z \leq 1{,}52) = 0{,}0431$

d) $p(-2{,}03 < Z < 1{,}52) = p(Z < 1{,}52) - p(Z \leq -2{,}03) = 0{,}9146$

Ejemplo 5

a) ¿Para qué valor de k *se cumple* $p(Z \leq k) = 0{,}84$*?*

b) ¿Para qué valor de k *se cumple* $p(-k \leq Z \leq k) = 0{,}8$*?*

Solución

a) $k = 0{,}995$

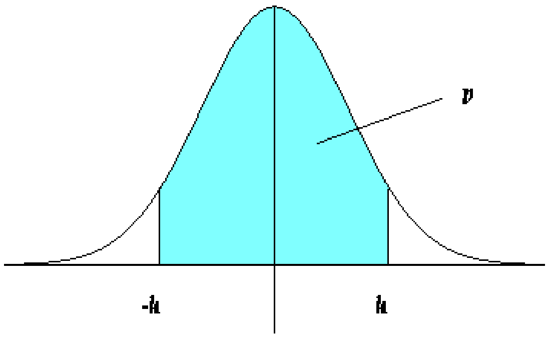
b) $k = 1{,}28$. El intervalo $(-1{,}28, 1{,}28)$ encierra un 80% del área en una

---

3.2 Intervalo característico y nivel de confianza

En una $N(0{,}1)$, si un intervalo $(-k, k)$ encierra un área igual a p, recibe el nombre de **intervalo característico** correspondiente a la probabilidad p, y k es el valor crítico.

$\boldsymbol{N(0,1)}$

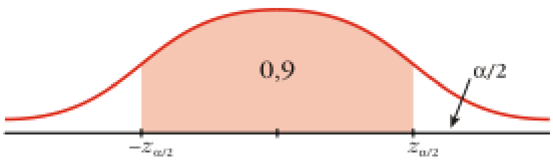


Habitualmente la probabilidad p se designa por 1- α y se llama **nivel de confianza**. El valor α se llama **nivel de significación**. De la misma forma, el **valor crítico** k se designa por $z_{\alpha/2}$.

Ejemplo 6

Calcula $k = z_{\alpha/2}$ *para* $p = 1 - \alpha = 0{,}9$

Resolución



Si el intervalo característico abarca un área de 0,9, fuera de él deberá haber un área de $\alpha = 0{,}1$; el área de cada una de las "colas" es $\frac{\alpha}{2}$ =0,05.

Se trata de buscar el valor de k tal que $p(Z \geq k) = 0{,}05$, esto es, $p(Z \leq k) = 0{,}95$

En las tablas encontramos:

$$p(Z \leq 1{,}64) = 0{,}9495$$
$$p(Z \leq 1{,}65) = 0{,}9505$$

El valor promedio entre 1,64 y 1,65 es 1,645. Por tanto, tomaremos $z_{\alpha/2} = 1{,}645$

El intervalo característico $[-1{,}645, 1{,}645]$ es aquel dentro del cual, en una distribución de probabilidad $N(0{,}1)$, hay un área 90% del total.

En la siguiente tabla figuran los intervalos característicos que más se suelen utilizar más:

$1-\alpha$	$\alpha/2$	$z_{\alpha/2}$	**Intervalo característico**
0,9	0,05	1,645	(-1'645, 1'645)
0,95	0,025	1,96	(-1'96, 1'96)
0,99	0,005	2,575	(-2'275, 2'575)

3.3 Tipificación de la variable

Las distribuciones normales que nos encontramos más a menudo no son del tipo $N(0,1)$.
Para calcular las probabilidades de una distribución normal $X \hookrightarrow N(\mu, \sigma)$ se debe efectuar el cambio de variable $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$. En este caso se dice que se ha tipificado la variable X. Una vez tipificada, la variable seguirá una distribución normal $N(0,1)$ y utilizaremos las tablas.

$$p(X \leq x) = p\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

En una $N(\mu, \sigma)$, el intervalo característico será $(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \sigma, \mu + z_{\alpha/2} \cdot \sigma)$

Ejemplo 7

La longitud de las truchas de una piscifactoría sigue una normal de media 25 cm, con una desviación típica de 2 cm. Calcula la probabilidad de que una trucha tomada al azar tenga un tamaño no superior a 26 cm.

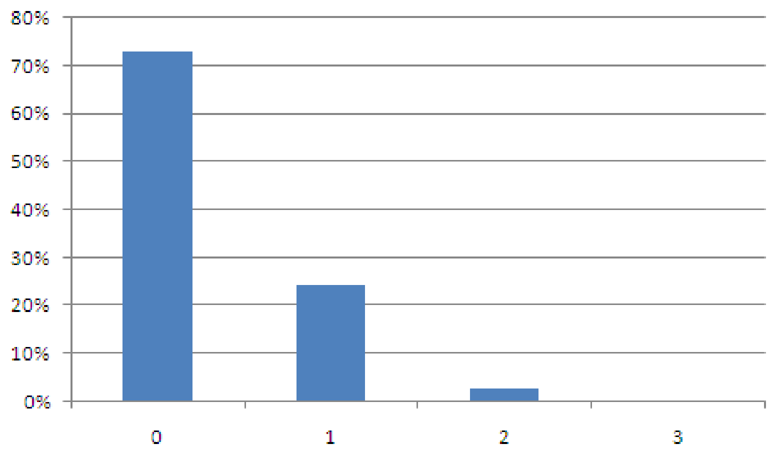
Resolución

Si llamamos X a la variable que mide la longitud de las truchas, se trata de una normal $N(25, 2)$.

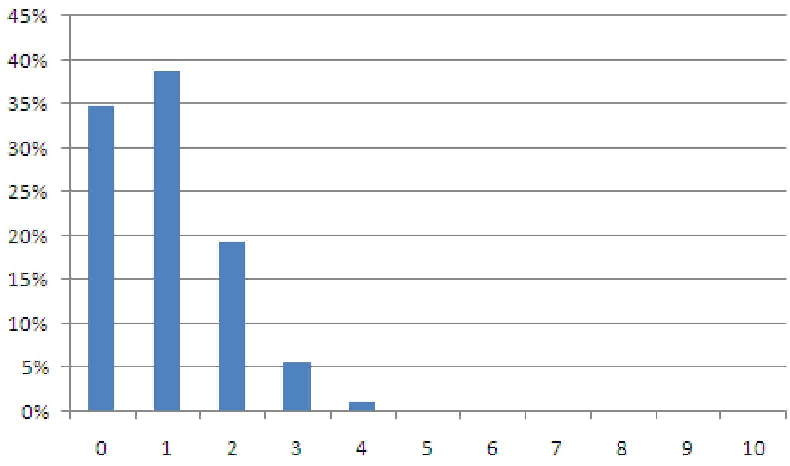
$$p(X \leq 26) = p\left(\frac{X-25}{2} \leq \frac{26-25}{2}\right) = p(Z \leq 0{,}5) = 0'6915$$

3.4 Aproximación de la binomial por la normal

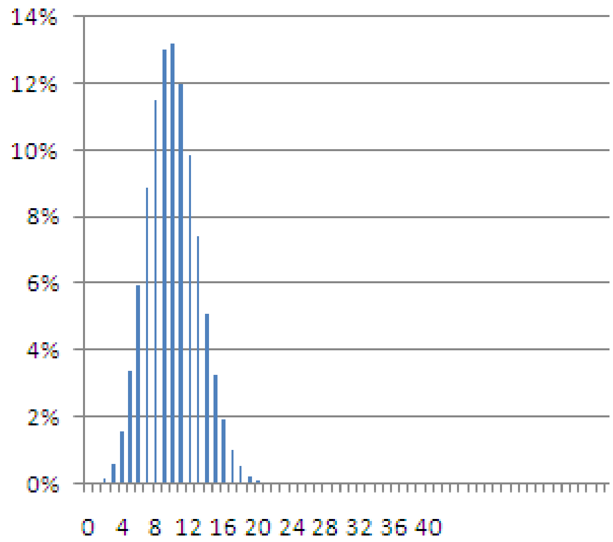
Supongamos que jugamos diariamente a un número de una lotería que, entre otros premios, devuelve el importe jugado a todos los números que acaban en la misma cifra que el número ganador.
Consideremos la variable $X(n)$, que nos da el número de veces que nos han devuelto el importe jugado cuando se han realizado n sorteos. En este caso sabemos que la variable aleatoria $X(n)$ sigue una distribución binomial de parámetros n y $p = 0{,}1$, porque se han hecho n sorteos (es decir, se ha repetido un mismo experimento n veces de manera independiente) y en cada sorteo la probabilidad de que nos devuelvan el dinero es $p = 1/10 = 0{,}1$ (probabilidad de éxito).
Sin embargo, observemos qué sucede al aumentar el valor de n con la función de probabilidad de la variable $X(n)$. Si dibujamos esta función de probabilidad para $n = 3$, obtenemos el gráfico siguiente:



Si ahora consideramos $n = 10$, los posibles valores van del 0 al 10, y el gráfico de la función de densidad de probabilidad es:



Si tomamos $n = 100$



Vemos, pues, que el perfil de este gráfico cada vez se parece más al de la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria normal. La conclusión que extraemos de este experimento es que si n es lo bastante grande, la variable aleatoria $X(n)$ es aproximadamente normal.

El Teorema Central del Límite indica que, en condiciones muy generales, la distribución de la suma de variables aleatorias tiende a una distribución normal cuando la cantidad de variables es muy grande, es decir, garantiza una distribución normal cuando n es suficientemente grande. Dado que la variable Binomial $B(n,p)$, no es más que la suma de n variables independientes (o la suma de los resultados obtenidos al efectuar n repeticiones de un experimento aleatorio con una variable aleatoria que sólo podía tomar dos posibles valores), su distribución tienda a aproximarse a la normal a medida que aumenta n, con media, la esperanza $E(X) = n \cdot p$ y varianza $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$ resultado demostrado por De Moivre en 1733. Este autor encontró que si X es una variable $B(n,p)$, la distribución:

$$\frac{X - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}$$

converge hacia una distribución normal tipificada o estandarizada, $N(0,1)$.

Existe mucha controversia para determinar cuando la aproximación a la normal proporciona resultados aceptables. Muchos autores suelen darla por aceptable cuando el producto $n \cdot p \cdot (1-p) > 10$ o bien $n > 30$.

En nuestro caso, una variable Binomial $B(n,p)$ se aproxima a una normal $N(\mu,\sigma)$, mediante la siguiente expresión:

$$B(n,p) \sim N\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right)$$

Para calcular $p(X < k)$ se toma $p(X \leq k - 0'5)$ para no incluir el valor de k.
Para calcular $p(X \leq k)$ se toma $p(X \leq k + 0'5)$ para incluir el valor de k.
Para calcular $p(X = k)$ se aplica $p(k - 0'5 \leq X \leq k + 0'5)$.

Ejemplo 8

La probabilidad de que un tenista obtenga un punto de saque directo es de 0,02. Si durante un torneo realiza 3000 servicios, ¿cuál es la probabilidad de que consiga más de 80 puntos de saque directo?

Resolución

Si llamamos X a la variable "número de saques directos", se trata de una binomial $X \hookrightarrow B(3000, 0'02)$. Como $np(1-p) > 10$, se puede aproximar por una normal:

$N(3000 \cdot 0'02, \sqrt{3000 \cdot 0'02 \cdot 0'98}$ y operando tenemos $N(60, 7'67)$.

Por tanto:

$$p(X > 80) = 1 - p(X \leq 80) = 1 - p(X \leq 80'5) = 1 - p\left(Z \leq \frac{80'5 - 60}{7'67}\right) =$$
$$= 1 - p(Z \leq 2'67) = 1 - 0'9962 = 0'0038$$
