Tema 10: Integral definida. Aplicaciones al cálculo de áreas

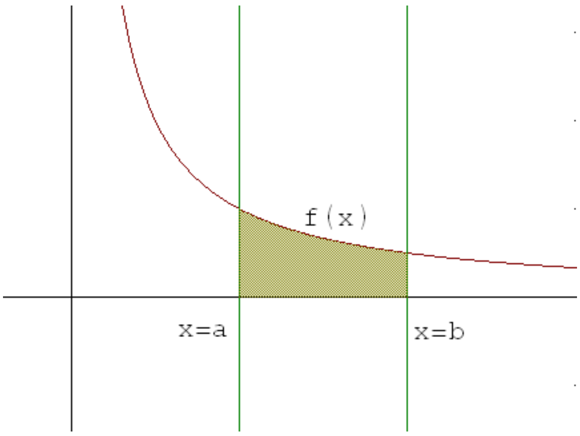
1. Introducción

Las integrales nos van a permitir calcular áreas de figuras no geométricas. En nuestro caso, nos limitaremos a calcular el área bajo una curva y el área encerrada entre dos curvas, si bien es cierto que la segunda se puede ver como caso particular de la primera.

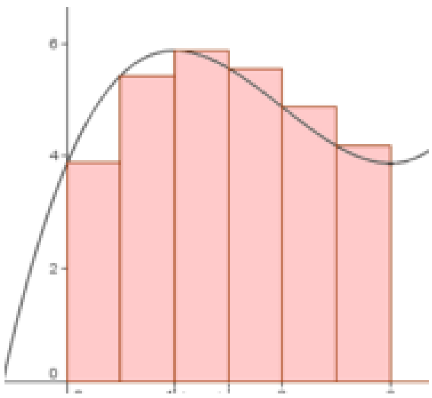
2. Integral definida

2.1 El problema del área bajo una curva

Sea $f: (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real, continua y positiva en el intervalo.
El problema que nos planteamos es el de hallar el área de la región que encierra la curva $y = f(x)$ con el eje de abscisas OX y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.



Una idea sencilla consiste en dividir la región en n rectángulos verticales con la misma base Δx , mediante una partición del intervalo $[a, b]$, $P = \{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b\}$, y alturas $f(x_i)$ con $i = 1, 2, \dots, n$. De esta manera el área de la región se puede aproximar, cuanto queramos, mediante la suma de las áreas de esos n rectángulos. Cuanto mayor sea el número de rectángulos, es decir $n \longrightarrow \infty$, mejor será la aproximación del área que buscamos.



Así, el área buscada se puede obtener mediante

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

El símbolo Σ se convirtió en una "s" estilizada $\int$ quedando la expresión anterior

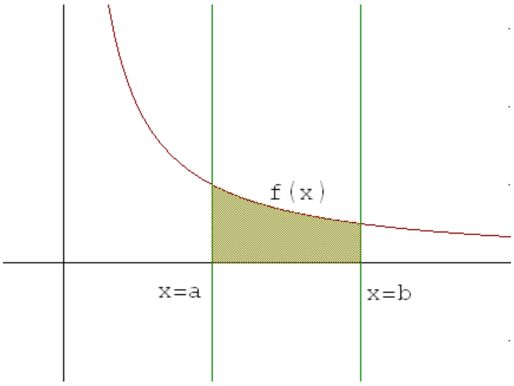
$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

2.2 Integral definida

Sea $f: (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real, continua y positiva en el intervalo.
Definimos la **integral definida** de una función $f(x)$ entre a y b, como área de la región limitada por la función $f(x)$ las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ y el eje OX. Dicha área la representaremos con el símbolo

$$\int_a^b f(x)dx$$

donde a y b se llaman límites de integración.

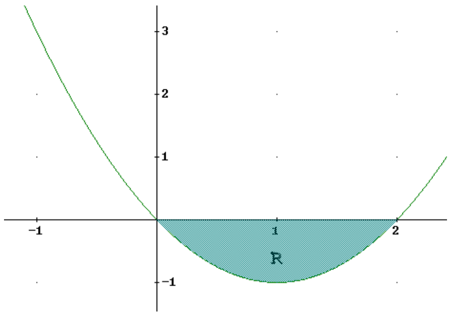


2.2.1 Signo de la integral definida

Hemos iniciado el tema suponiendo una función $f(x)$ continua en un intervalo (a, b) y positiva en él. Es claro que si la función $f(x)$ es negativa en el intervalo (a, b), los valores $f(x_i)$ son también negativos, con $x_i \in (a, b)$, y la construcción a base de sumas de $f(x_i) \cdot \Delta x$ producirá un valor negativo que no puede ser área de ninguna región. Bastará, en este caso, tomar valor absoluto del resultado obtenido.

Por ejemplo, la parábola de ecuación $f(x) = x^2 - 2x$ es negativa en $(0, 2)$ como muestra la figura y, por tanto, su integral definida en ese intervalo es negativa también:

$$\int_0^2 f(x)dx < 0$$



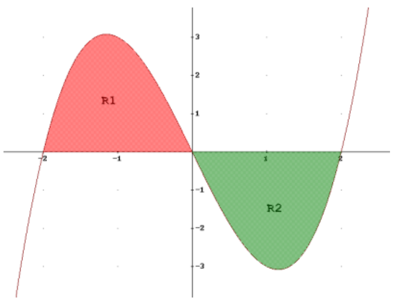
El área de la región plana R limitada por la curva y el eje de abcisas será:

$$A(R) = -\int_0^2 (x^2 - 2x)\ dx = \left|\int_0^2 (x^2 - 2x)\ dx\right|$$

$$Área = -\int_0^2 f(x)dx = \left|\int_0^2 f(x)dx\right|$$

En otros casos la función $f(x)$ toma valores positivos y negativos en un intervalo (a, b), como por ejemplo la curva $f(x) = x^3 - 4x$ en el intervalo $(-2, 2)$. La simetría impar de esta función hace que

$$\int_{-2}^2 (x^3 - 4x)\ dx = 0$$



Para calcular el área de la región plana limitada por la curva y el eje de abscisas OX procedemos como sigue:

$$Área = A(R1) + A(R2) = \int_{-2}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{2} f(x)dx$$

o también, por simetría:

$$Área = 2 \cdot A(R1) = 2 \cdot \int_{-2}^{0} f(x)dx$$

2.2.2 Propiedades de la integral definida

P1] El valor de la integral definida cambia de signo si se intercambian los límites de integración:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = -\int_{b}^{a} f(x)dx$$

P2] Si los límites de integración son iguales, la integral definida vale cero:

$$\int_{a}^{a} f(x)dx = 0$$

P3] Si c es un punto interior del intervalo (a,b), la integral definida se descompone como una suma de dos integrales extendidas a los intervalos (a,c) y (c,b):

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx$$

P4] La integral definida de una suma de funciones es igual a la suma de integrales:

$$\int_{a}^{b} (f(x) \pm g(x))dx = \int_{a}^{b} f(x)dx \pm \int_{a}^{b} g(x)dx$$

P5] La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función:

$$\int_{a}^{b} \big(k \cdot f(x)\big)dx = k \cdot \int_{a}^{b} f(x)dx$$

3. Teorema de la media del cálculo integral

Sea $f : [a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = f(c) \cdot (b-a)$$

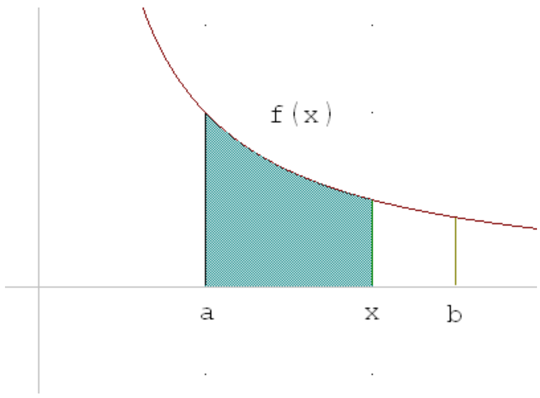
Geométricamente el teorema dice que el valor de la integral definida coincide con el área de un rectángulo de dimensiones la amplitud del intervalo y el valor que toma la función en un punto del mismo. (Si $f(c) < 0$ no entendemos área sino valor del producto)

4. Teorema fundamental del cálculo integral

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua.
Sea $F(x)$ la función integral definida por

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(x)dx$$

Entonces $F'(x) = f(x)$



Demostración

$$F'(x)=\lim_{h\to o}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to o}\frac{\int_a^{x+h}f(x)dx-\int_a^{x}f(x)dx}{h}=\lim_{h\to o}\frac{\int_x^{x+h}f(x)dx}{h}\overset{T.Media}{\triangleq}$$

$$=\lim_{h\to o}\frac{f(c)\cdot h}{h}=\lim_{h\to o}f(c)=f(x)\qquad con\ c\in(x,x+h)$$

5. Regla de Barrow

Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función continua y $G(x)$ una primitiva de $f(x)$. Entonces la integral definida

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx=G(b)-G(a)=[G(x)]_a^b}$$

La regla de Barrow dice que la integral definida de una función continua $f(x)$ en un intervalo cerrado $[a,b]$ es igual a la diferencia entre los valores que toma una función primitiva $G(x)$ de $f(x)$ en los extremos de dicho intervalo:

Demostración

Hemos visto que la función integral $F(x)=\int_a^x f(x)dx$ es una primitiva de $f(x)$ porque $F'(x)=f(x)$.

Como $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas de $f(x)$ se diferencia en una constante y entonces:

$$F(x)=G(x)+c$$

Sustituyendo en $x=a$ obtenemos:

$$F(a)=G(a)+c\Leftrightarrow 0=\int_a^a f(x)dx=G(a)+c\Longrightarrow c=-G(a)$$

y sustituyendo en $x=b$

$$F(b)=G(b)+c\Leftrightarrow\int_a^b f(x)dx=G(b)-G(a)$$

Ejemplo 1

Calcula las integrales definidas siguientes:

$a)\ \int_1^2 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$

$b)\ \int_1^e\frac{1}{x}\,dx=[L|x|]_1^e=Le-L1=1$

$c)\ \int_1^2\frac{x^2-3}{x^2}dx=\int_1^2\left(1-\frac{3}{x^2}\right)dx=\left[x+\frac{3}{x}\right]_1^2=2+\frac{3}{2}-(1+3)=-\frac{1}{2}$

$d)\ \int_{-1}^1(x^3-x)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^1=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=0$

$e)\ \int_0^2\frac{\sqrt{x}}{2}\,dx=\left[\frac{x\sqrt{x}}{3}\right]_0^2=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

---

6. Aplicaciones al cálculo de áreas de recintos planos

A continuación daremos forma a lo aprendido en esta unidad, la aplicación del cálculo de primitivas al cálculo de áreas de recintos planos.

6.1 Áreas de recintos planos en los que interviene una función

Antes de efectuar cálculos debemos seguir los pasos siguientes:

1. Representación gráfica de la función f que interviene en el problema.
2. Delimitación del recinto cuya área deseamos calcular.
3. Estudio del signo de la función f en el intervalo correspondiente.
4. Utilización, en el caso de que exista, de la simetría en el recinto.

Ejemplo 2

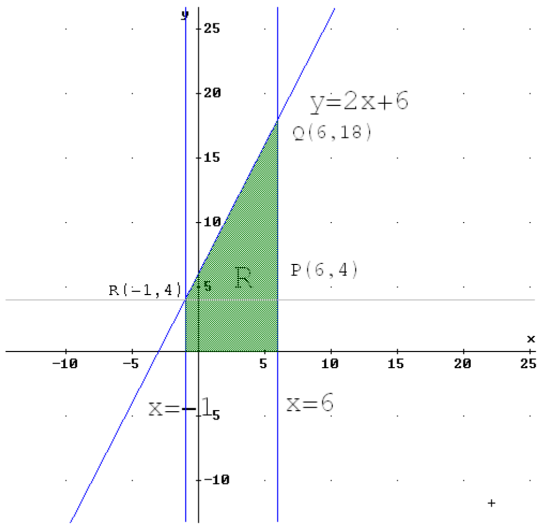
Interpreta geométricamente el área que define la integral

$$\int_{-1}^{6} (2x + 6)\, dx$$

y calcula su valor.

Resolución

Geométricamente, la integral representa el área de la región del plano R limitada por la recta $y = 2x + 6$, las verticales $x = -1$, $x = 6$ y el eje de abscisas OX.



$$Área(R) = Área(rectángulo) + Área(triángulo)$$

$$Área(R) = 7 \cdot 4 + \frac{7 \cdot 14}{2} = 77\, u^2$$

Calculando la integral definida, obtenemos:

$$\int_{-1}^{6} (2x + 6)dx = [x^2 + 6x]_{-1}^{6} \underbrace{=}_{Barrow} 36 + 36 - (1 - 6) = 77\, u^2$$

Ejemplo 3

Calcula el área de la región del plano limitada por la curva de ecuación $f(x) = x^3 - 4x$ y el eje de abscisas.

Resolución

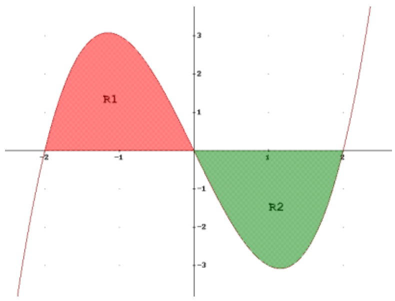
Para dibujar la región del plano, determinamos los cortes de $f(x) = x^3 - 4x$ con el eje OX:

$$x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

y observamos que

$$\lim_{x\to -\infty} (x^3 - 4x) = -\infty \quad y \quad \lim_{x\to +\infty} (x^3 - 4x) = +\infty$$

Así, la región del plano es la que se muestra en la figura



Teniendo en cuenta que la función $f(x)$ es negativa en el intervalo $(0, 2)$

$$Área = A(R1) + A(R2) = \int_{-2}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{2} f(x)dx$$

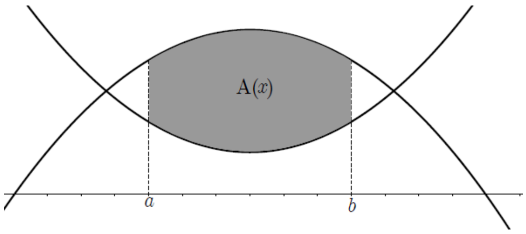
o también, por simetría, al ser la función impar:

$$Área = 2 \cdot A(R1) = 2 \cdot \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)dx = 2 \cdot \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0} = -2 \cdot (4 - 8)) = 8\, u^2$$

6.2 Áreas de recintos planos en los que intervienen dos funciones

En este apartado vamos a considerar dos situaciones que se nos van a presentar:

6.2.1 El recinto se limita



Una vez que hacemos el esbozo de las gráficas, queda claro qué función está encima. Supongamos que $f(x) > g(x)$ en el intervalo considerado con lo que la función diferencia

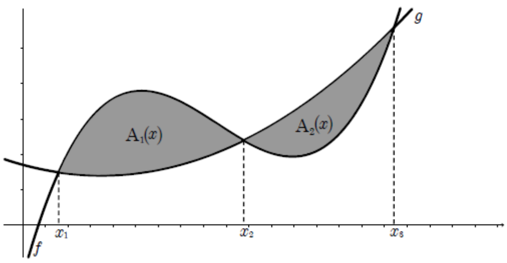
$$h(x) = f(x) - g(x) > 0$$

Así, el problema de calcular el área comprendida entre las dos funciones, limitada por las rectas $x = a$ y $x = b$, es equivalente al de calcular el área comprendida por la curva de ecuación $y = h(x)$, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$.
En el caso de que $f(x) < g(x)$ en el intervalo, tomaremos $h(x) = g(x) - f(x)$.

$$Área = A(x) = \int_{a}^{b} h(x)dx$$

6.2.2 Las funciones se cortan en uno o más puntos

Ahora no hay restricción en cuanto a intervalo a considerar. Queremos determinar el área de la región limitada por dos funciones. Es posible que éstas se corten en varios puntos y por tanto que cambien de posición relativa. Además, el problema se puede completar añadiendo rectas verticales para ampliar o recortar el recinto.



El área del recinto sombreado viene dada por

$$Área = A_1 + A_2 = \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))\, dx + \int_{x_2}^{x_3} (g(x) - f(x))\, dx$$

Ejemplo 4

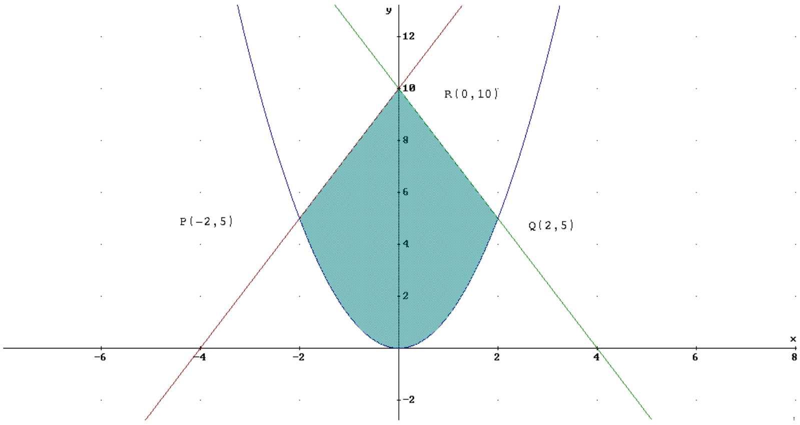
Representar gráficamente la región del plano limitada por las gráficas de las funciones

$f(x) = \frac{5}{4}x^2$, $g(x) = \frac{1}{2}(5x + 20)$, $h(x) = \frac{1}{2}(-5x + 20)$ *y obtener su área.*

Resolución

Calculamos los puntos de corte de las funciones:

$\begin{cases} y = \frac{5}{4}x^2 \\ y = \frac{1}{2}(5x + 20) \end{cases}$ $P(-2{,}5)$; $\begin{cases} y = \frac{5}{4}x^2 \\ y = \frac{1}{2}(-5x + 20) \end{cases}$ $Q(2{,}5)$; $\begin{cases} y = \frac{1}{2}(5x + 20) \\ y = \frac{1}{2}(-5x + 20) \end{cases}$ $R(0{,}10)$



Por simetría de la región, tenemos que su área viene dada por:

$$A = 2 \cdot \int_0^2 \left(\frac{1}{2}(-5x + 20) - \left(\frac{5}{4}x^2\right)\right) dx = 2 \cdot \int_0^2 \left(-\frac{5}{4}x^2 - \frac{5x}{2} + 10\right) dx =$$

$$10 \cdot \int_0^2 \left(-\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + 2\right) dx = 10 \cdot \left[-\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{4} + 2x\right]_0^2 = \frac{70}{3}\ u^2$$