

Tema 9: Estudio y representación de funciones

1. Introducción

El objetivo de esta unidad es representar gráficamente funciones polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales y logarítmicas sencillas, para lo que, en primer lugar, tenemos que estudiar cómo se comportan en su dominio de definición. La mayor parte del estudio a realizar ya lo hemos visto en unidades anteriores y ahora lo completaremos con algunas características que se pueden determinar.

2. Estudio y representación de una función

El guión que vamos a utilizar en el estudio y representación de una función $y = f(x)$ será el siguiente:

1] Dominio de definición.	7] Curvatura.
2] Cortes con los ejes coordenados.	8] Puntos de inflexión.
3] Simetría.	9] Asíntotas.
4] Regiones	10] Periodicidad.
5] Monotonía.	11] Representación gráfica.
6] Extremos.	

Vamos a ver cada uno de esos puntos y los aplicaremos a modo de primer ejemplo a la función

$$y = f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

2.1 Dominio de definición

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} / y = f(x) \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo: $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$; $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$; $Dom(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

2.2 Cortes con los ejes coordenados

Cortes con el eje OX: Hacemos $y = f(x) = 0$ y resolvemos la ecuación. Los valores obtenidos, si existen, x_1, \dots, x_n determinan las abscisas de los puntos de corte con dicho eje:

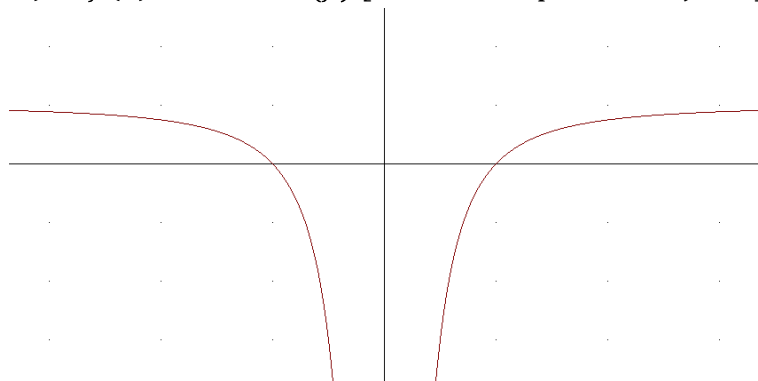
$$P_1(x_1, 0), \dots, P_n(x_n, 0)$$

Corte con el eje OY: Hacemos $x = 0$ y calculamos $y = f(0)$ si es posible, en cuyo caso obtenemos el corte en el punto $P(0, y)$.

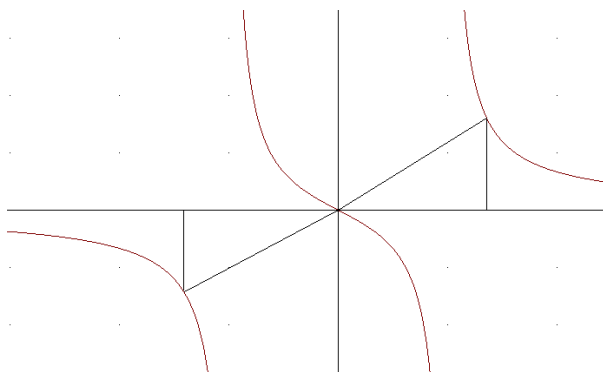
Ejemplo: $f(x) = \frac{x+1}{x-2} \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = \frac{-1}{2}; P(0, \frac{-1}{2}) \\ y = 0 \Rightarrow \frac{x+1}{x-2} \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1; Q(-1, 0) \end{cases}$

2.3 Simetría

• $f(x)$ es **par** $\equiv f(-x) = f(x) \forall x \in Dom(f)$ [Simetría respecto del eje OY]



- $f(x)$ es **impar** $\equiv f(-x) = -f(x) \forall x \in \text{Dom}(f)$ [Simetría respecto del origen de coordenadas]



2.4 Regiones

Las regiones se corresponde con determinar el signo de la función en su dominio.

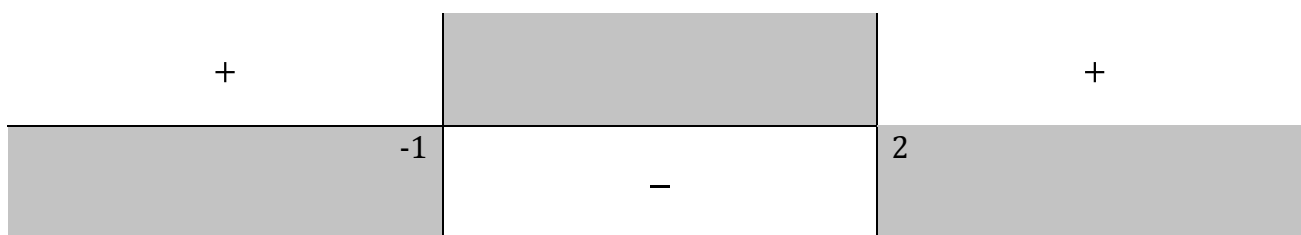
Ejemplo: $f(x) = \frac{x+1}{x-2} \begin{cases} < 0 \\ > 0 \end{cases}$ Resolvemos las inecuaciones calculando raíces y polos:

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1, \quad x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

La recta real queda dividida en tres intervalos, $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$ y $(2, +\infty)$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo de $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$	+	-	+

Así, quedan determinadas las regiones de la gráfica de la función (en blanco)



2.5 Monotonía

Se trata de estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento mediante el signo de la primera derivada.

$$f'(x) > 0 \text{ en } I \Rightarrow f(x) \text{ creciente en } I$$

$$f'(x) < 0 \text{ en } I \Rightarrow f(x) \text{ decreciente en } I$$

Ejemplo: $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$; $f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0$ en $\text{Dom}(f)$. Por tanto f es decreciente en su dominio

2.6 Extremos

Para determinar los extremos de la función podemos utilizar el resultado del apartado anterior o el criterio de la segunda derivada:

$$f'(x_0) = 0 \text{ y } \begin{cases} f''(x_0) > 0 \Rightarrow \text{Mínimo relativo} \\ f''(x_0) < 0 \Rightarrow \text{Máximo relativo} \end{cases} \text{ en } x_0$$

Ejemplo: $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$; Como f es decreciente en su dominio, no tiene extremos.

2.7 Curvatura

Se trata de estudiar los intervalos de concavidad y convexidad mediante el signo de la segunda derivada.

$$\begin{cases} f''(x) > 0 \text{ en } I \Rightarrow f(x) \text{ cóncava en } I \\ f''(x) < 0 \text{ en } I \Rightarrow f(x) \text{ convexa en } I \end{cases}$$

Ejemplo: $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$; $f'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2}$; $f''(x) = \frac{6}{(x-2)^3} \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$

Resolvemos las inecuaciones:

$$(x - 2)^3 = 0 \Rightarrow x = 2$$

La recta real queda dividida en dos intervalos, $(-\infty, 2)$ y $(2, +\infty)$

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo de $f''(x) = \frac{6}{(x-2)^3}$	-	+

$f(x)$ convexa en $(-\infty, 2)$ y cóncava en $(2, +\infty)$

2.8 Puntos de inflexión

Para determinar los puntos de inflexión de la función podemos utilizar el resultado del apartado anterior o el criterio de la tercera derivada:

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \text{ derivable en } x_0 \text{ tres veces} \\ f''(x_0) = 0 \text{ y } f'''(x_0) \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \text{ tiene un punto de inflexión en } x_0$$

Ejemplo: $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

$f(x)$ convexa en $(-\infty, 2)$ y cóncava en $(2, +\infty)$

No existen puntos de inflexión puesto que $f(x)$ no está definida en $x = 2$.

2.9 Asíntotas

2.9.1 Asíntotas verticales

La recta $x = a$ es **asíntota vertical** de la función $y = f(x) \equiv$ alguno de los límites laterales en el punto es infinito: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$ o $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$.

En las asíntotas verticales nosotros tenemos que aportar los valores de a para los cuales calcular los límites.

Una función puede tener no tener o tener varias asíntotas verticales.

2.9.2 Asíntotas horizontales

La recta $y = b$ es **asíntota horizontal** de la función $y = f(x) \equiv$ alguno de los límites laterales en el infinito es b : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ o $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$. ($b \in \mathbb{R}$)

En las asíntotas horizontales planteamos siempre los mismos límites y el resultado es el que nos dice si existen o no.

Una función puede tener, a lo sumo, dos asíntotas horizontales.

2.9.2 Asíntotas oblicuas

Las **asíntotas oblicuas** de una función son rectas oblicuas, es decir, rectas de la forma

$$y = mx + n, \text{ con } m \neq 0$$

Una función puede tener, como máximo, dos asíntotas oblicuas distintas (una por la izquierda de su gráfica y otra por la derecha de la misma). El cálculo de las mismas se realiza así:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}; \text{ si } m \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ entonces } n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx]$$

Las funciones polinómicas no tiene asíntotas.

Las funciones que nosotros estudiaremos tendrán, a lo sumo, una asíntota horizontal o una oblicua.

Ejemplo: $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

Como $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x-2} \begin{cases} \stackrel{3}{=} \\ \stackrel{0}{=} \end{cases} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-2} \stackrel{3}{=} -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2} \stackrel{3}{=} +\infty \end{cases}$ la recta $x = 2$ es asíntota vertical.

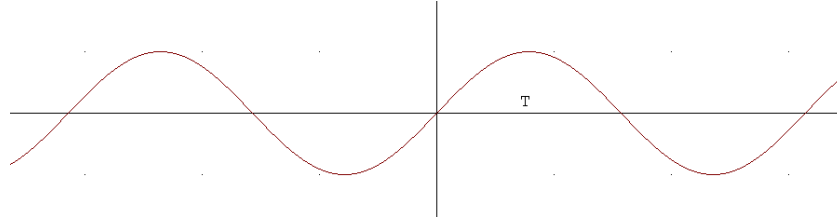
Como $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x-2} = 1$ la recta $y = 2$ es asíntota horizontal.

No hay asíntota oblicua porque $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x^2-2x} = 0$

2.10 Periodicidad

Una función $f(x)$ es **periódica** de periodo $T \equiv f(x + T) = f(x) \forall x \in \text{Dom}(f)$

Son conocidas la periodicidad de las funciones trigonométricas; por ejemplo, la función $f(x) = \text{sen}x$ es periódica de periodo $T = 2\pi$:

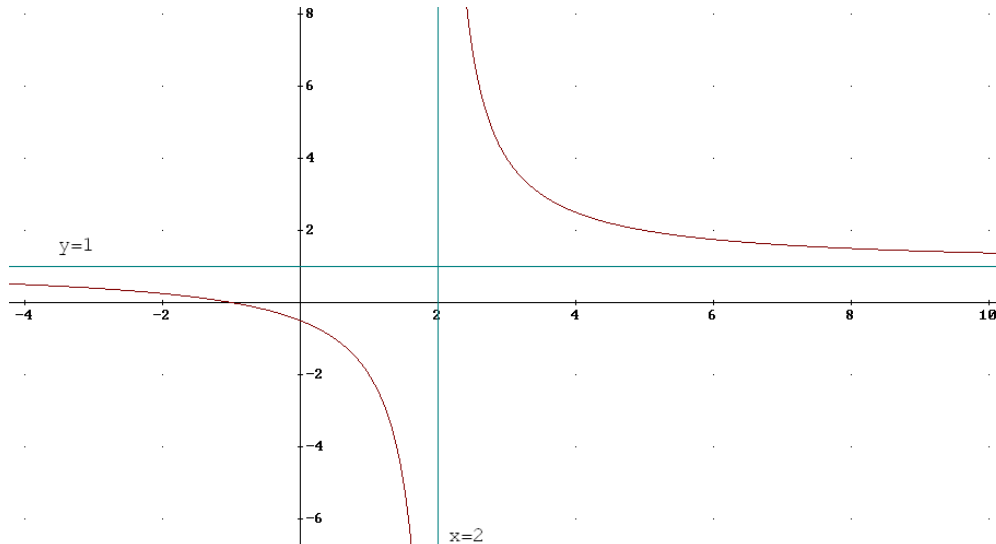


La función del ejemplo $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ no es periódica.

2.11 Representación gráfica

La información obtenida en los puntos anteriores la utilizamos para representar la gráfica de la función con exactitud dibujando las asíntotas y los puntos significativos que han aparecido.

Ejemplo: $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$



Ejemplo 2

Vamos a estudiar y representar gráficamente la función polinómica $y = f(x) = x^4 - x^2$

Resolución

1] Dominio $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ por ser polinómica.

2] Cortes con los ejes

$$\text{Eje } OX: y = 0 \Leftrightarrow x^4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ x^2 - 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

Los puntos de corte con el eje OX son $O(0,0)$, $A(-1,0)$ y $B(1,0)$

$O(0,0)$ es el corte con el eje OY

3] Simetrías

$$f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 = x^4 - x^2 = f(x)$$

La función es par, simétrica respecto del eje de ordenadas.

4] Regiones (signo de la función)

Se trata de resolver las inecuaciones $f(x) = x^4 - x^2 \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$

$$x^4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot (x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ x^2 - 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

Estos valores dividen la recta real en cuatro intervalos en los que determinamos el signo:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo de $f(x) = x^4 - x^2$	+	-	-	+

Así, quedan determinadas las regiones de la gráfica de la función (en blanco)

+			+
-1	-	0	1
	-	-	

5] Monotonía (signo de f')

Se trata de resolver las inecuaciones $f'(x) = 4x^3 - 2x \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$

$$4x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x \cdot (2x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ 2x^2 - 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

La recta real queda dividida en cuatro intervalos:

	$(-\infty, -\sqrt{2}/2)$	$(-\sqrt{2}/2, 0)$	$(0, \sqrt{2}/2)$	$(\sqrt{2}/2, +\infty)$
Signo de $f'(x) = 4x^3 - 2x$	-	+	-	+

La función $f(x) \begin{cases} \text{decrece en } (-\infty, -\sqrt{2}/2) \cup (0, \sqrt{2}/2) \\ \text{crece en } (-\sqrt{2}/2, 0) \cup (\sqrt{2}/2, +\infty) \end{cases}$

6] Extremos

La información obtenida en el apartado anterior nos permite determinar los extremos:

Los puntos $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ y $Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ son mínimos relativos y el punto $O = (0, 0)$ máximo relativo donde $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

7] Curvatura (signo de f'')

Se trata de estudiar los intervalos de concavidad y convexidad mediante el signo de la segunda derivada.

$$f''(x) = 12x^2 - 2 \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$$

Resolvemos las inecuaciones:

$$12x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{6}}{6}$$

La recta real queda dividida en tres intervalos, $(-\infty, 2)$ y $(2, +\infty)$

	$(-\infty, -\sqrt{6}/6)$	$(-\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/6)$	$(\sqrt{6}/6, +\infty)$
Signo de $f''(x) = 12x^2 - 2$	+	-	+

$f(x)$ cóncava en $(-\infty, -\sqrt{6}/6) \cup (\sqrt{6}/6, +\infty)$

$f(x)$ convexa en $(-\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/6)$

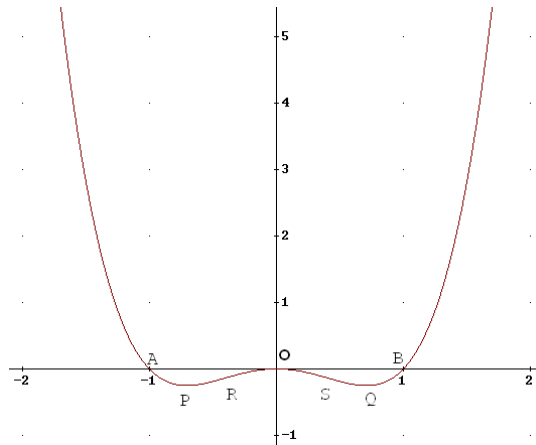
8] Puntos de inflexión

Los cambios de curvatura se producen en los puntos $R\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{5}{36}\right)$ y $S\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{5}{36}\right)$ donde $f\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = f\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = -\frac{5}{36}$

9] Asíntotas

No tiene por ser función polinómica.

10] Representación gráfica



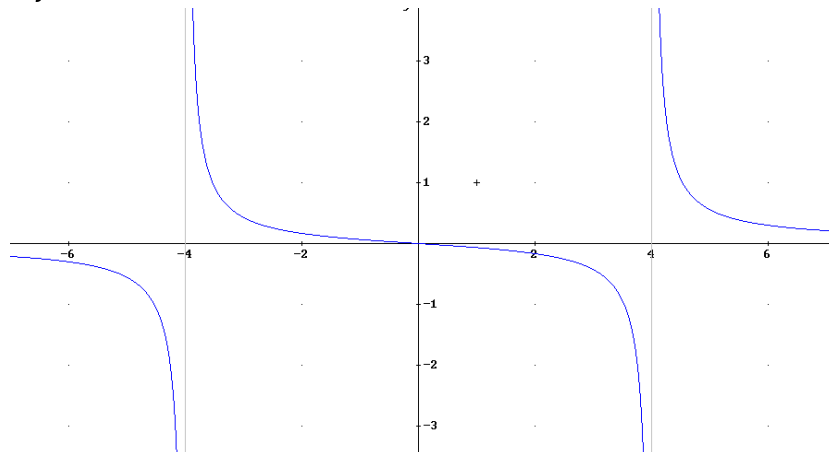
Ejemplo 3

Estudiamos y representamos gráficamente la función $y = f(x) = \frac{x}{x^2-16}$

Damos la solución de cada apartado y el alumno debe llegar a ella.

Solución

- Dominio: $D = \mathbb{R} - \{-4, 4\}$
- Simetrías: Impar
- Cortes con los ejes: $A(0, 0)$
- Regiones: $\begin{cases} y > 0 & (-4, 0) \cup (4, +\infty) \\ y < 0 & (-\infty, -4) \cup (0, 4) \end{cases}$
- $y' = \frac{-(x^2+16)}{(x^2-16)^2} < 0$ en D . Decreciente en D
- Extremos: No tiene
- $y'' = \frac{2x^3+96x}{(x^2-16)^3} \begin{cases} > 0 & (-4, 0) \cup (4, +\infty) \text{ Cóncava} \\ < 0 & (-\infty, -4) \cup (0, 4) \text{ Convexa} \end{cases}$
- Puntos de inflexión: $A(0,0)$
- Asíntotas:
 - Verticales: $x = -4$ y $x = 4$
 - Horizontal: $y = 0$



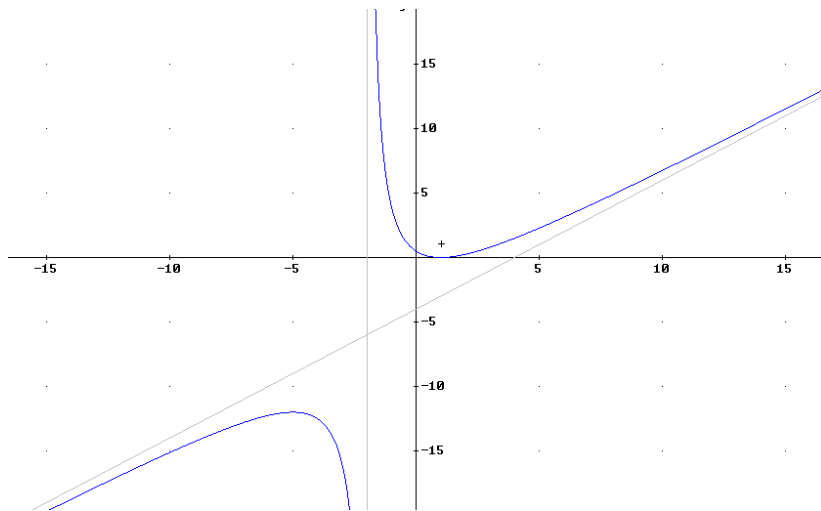
Ejemplo 4

Estudiamos y representamos gráficamente la función $y = f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+2}$

Damos la solución de cada apartado y el alumno debe llegar a ella.

Solución

- Dominio: $D = \mathbb{R} - \{-2\}$
- Simetrías: No tiene
- Cortes con los ejes: $A(0, \frac{1}{2})$ y $B(1,0)$
- Regiones: $\begin{cases} y > 0 & (-2, +\infty) \\ y < 0 & (-\infty, -2) \end{cases}$
- $y' = \frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2} \begin{cases} > 0 & (-\infty, -5) \cup (1, +\infty) \text{ Creciente} \\ < 0 & (-5, -2) \cup (-2, 1) \text{ Decreciente} \end{cases}$
- Extremos:
Máximo en $C(-5, -12)$
Mínimo en $D(1,0)$
- $y'' = \frac{18}{(x+2)^3} \begin{cases} > 0 & (-2, +\infty) \text{ Cóncava} \\ < 0 & (-\infty, -2) \text{ Convexa} \end{cases}$
- Puntos de inflexión: No tiene
- Asíntotas: Vertical: $x = -2$ Oblicua: $y = x - 4$



Ejemplo 5

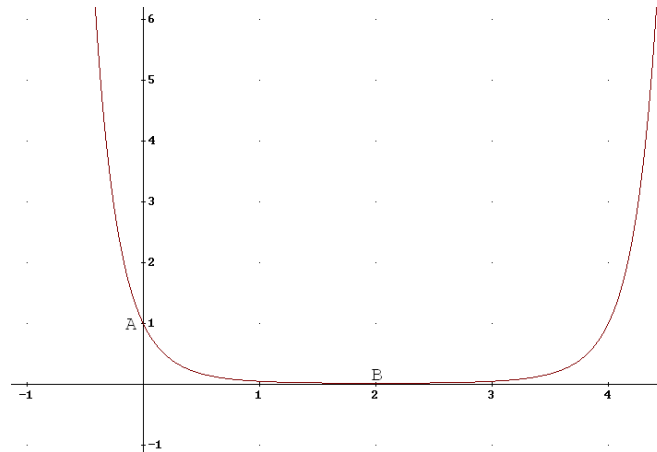
Estudiamos y representamos gráficamente la función $y = f(x) = e^{x^2-4x}$

Damos la solución de cada apartado y el alumno debe llegar a ella.

Solución

- Dominio: $D = \mathbb{R}$
- Simetrías: No tiene
- Cortes con los ejes: $A(0,1)$
- Regiones: $y > 0$ en D
- $y' = e^{x^2-4x} \cdot (2x - 4) \begin{cases} > 0 & (2, +\infty) \text{ Creciente} \\ < 0 & (-\infty, 2) \text{ Decreciente} \end{cases}$
- Extremos:
Mínimo en $B(2, \frac{1}{e^4})$
- $y'' = e^{x^2-4x} \cdot [(2x - 4)^2 + 2] > 0$ en D . Cóncava en D

- Puntos de inflexión: No tiene
- Asíntotas: No tiene



Ejemplo 6

Estudiamos y representamos gráficamente la función $y = f(x) = y = L(x^2 - 1)$

Damos la solución de cada apartado y el alumno debe llegar a ella.

Solución

- Dominio: $D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- Simetrías: Par
- Cortes con los ejes: $A(-\sqrt{2}, 0)$ y $B(\sqrt{2}, 0)$
- Regiones: $\begin{cases} y > 0 & (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty) \\ y < 0 & (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}) \end{cases}$
- $y' = \frac{2x}{x^2-1} \begin{cases} > 0 & (1, +\infty) \text{ Creciente} \\ < 0 & (-\infty, -1) \text{ Decreciente} \end{cases}$
- Extremos: No tiene
- $y'' = \frac{-2 \cdot (x^2+1)}{(x^2-1)^2} < 0$ en D . Convexa en D
- Puntos de inflexión: No tiene
- Asíntotas:

Verticales: $x = -1$ y $x = 1$

