

## Tema 8: Aplicaciones de la derivada

### 1. Introducción

En la unidad anterior hemos establecido el concepto de derivada de una función  $f(x)$  en un punto  $x_0$  de su dominio y la hemos interpretado geoméricamente como la pendiente de la **recta  $t$  tangente** a la curva  $y = f(x)$  en el punto  $P(x_0, f(x_0))$ :

$$t \equiv y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

La **recta  $n$  normal** a la curva  $y = f(x)$  en el punto  $P(x_0, f(x_0))$  es la perpendicular a la tangente en dicho punto y su ecuación es:

$$n \equiv y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

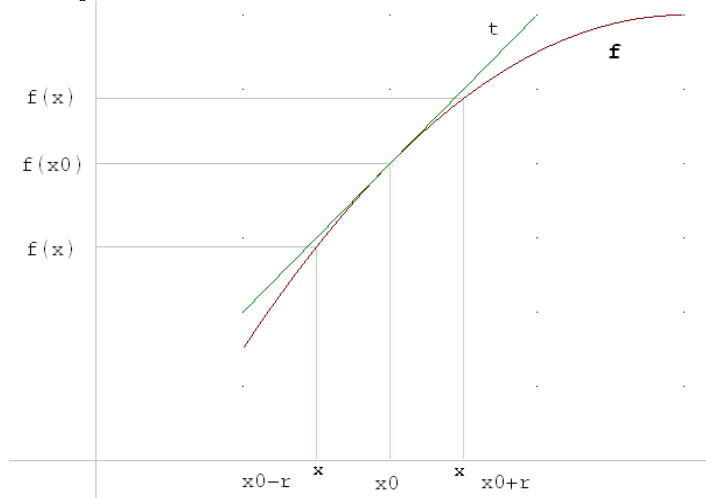
Observemos que el producto de las pendientes de  $t$  y  $n$  es  $t \cdot n = -1$ .

En esta unidad vamos a ver las aplicaciones de la derivada en el estudio de propiedades locales y globales de funciones reales de variable real como son crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos, concavidad, convexidad y puntos de inflexión así como en la resolución de problemas de optimización.

### 2. Monotonía de una función

La idea gráfica que todos tenemos de una función que crece en un punto es la de una representación que sube en nuestro sentido de escritura de izquierda a derecha.

Formalmente, una función  $f(x)$  es estrictamente creciente en un punto  $x_0$  de su dominio si y solo si existe un intervalo centrado en él  $(x_0 - r, x_0 + r)$  tal que para los valores  $x$  del intervalo a la izquierda de  $x_0$ , se tiene  $f(x) < f(x_0)$ , y  $f(x) > f(x_0)$  para los valores  $x$  del intervalo a la derecha de  $x_0$ .



- $f(x)$  es **estrictamente creciente en  $x_0$**   $\equiv$

$$\exists (x_0 - r, x_0 + r) / \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \begin{cases} x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \\ x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) \end{cases}$$

Además, si  $f(x)$  es derivable en  $x_0$  la pendiente  $f'(x_0)$  de la recta  $t$  tangente en el punto de abscisa  $x_0$  es positiva:

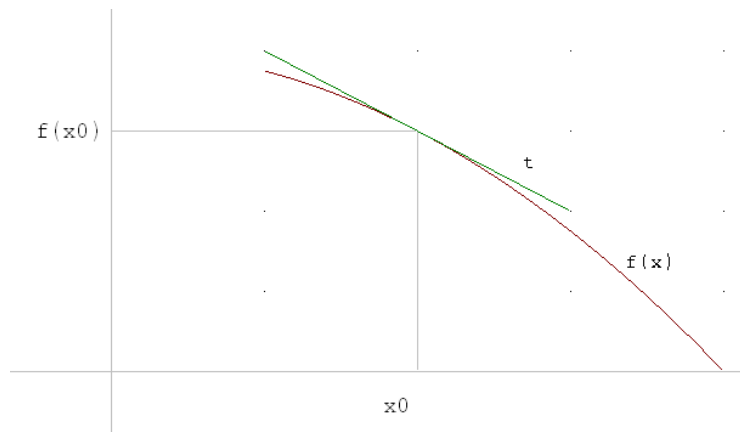
$$f'(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ estrictamente creciente en } x_0$$

- $f(x)$  es **estrictamente creciente en un intervalo  $I$**   $\equiv$

$$\forall x_1, x_2 \in I \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$$\forall x \in I \quad f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ estrictamente creciente en } I$$

De forma análoga definimos decrecimiento de una función:



- $f(x)$  es **estrictamente decreciente en**  $x_0 \equiv$

$$\exists (x_0 - r, x_0 + r) / \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \begin{cases} x < x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) \\ x > x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) \end{cases}$$

Además, si  $f(x)$  es derivable en  $x_0$ , la pendiente  $f'(x_0)$  de la recta  $t$  tangente en el punto de abscisa  $x_0$  es negativa:

$$f'(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ estrictamente decreciente en } x_0$$

- $f(x)$  es **estrictamente decreciente en un intervalo**  $I \equiv$

$$\forall x_1, x_2 \in I \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

$$\forall x \in I \quad f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ estrictamente decreciente en } I$$

Por tanto, para determinar la monotonía de una función debemos estudiar, en general, el signo de la primera derivada.

### Ejemplo 1

Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función  $f(x) = x^3 - x^2$ .

#### Resolución

Estudiamos el signo de la derivada  $f'(x) = 3x^2 - 2x \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$

Resolvemos las inecuaciones de segundo grado. Para ello, en primer lugar, hallamos los valores que anulan la expresión:

$$3x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x \cdot (3x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2/3 \end{cases}$$

Estos valores dividen la recta real en intervalos, en cada uno de los cuales vamos a determinar el signo de la derivada  $f'$  sustituyendo en ella un valor cualquiera de cada uno de ellos:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2/3)$	$(2/3, +\infty)$
Signo de $f'(x) = 3x^2 - 2x$	+	-	+

$f(x)$  crece en el intervalo  $(-\infty, 0) \cup (2/3, +\infty)$

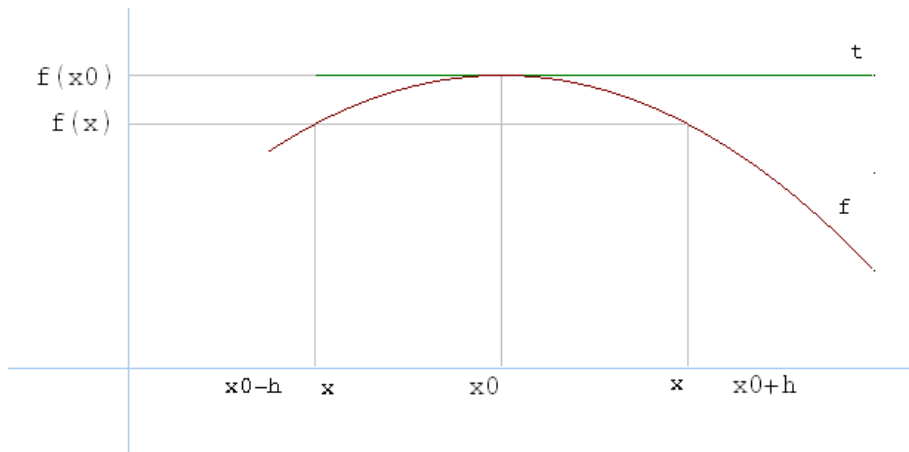
$f(x)$  decrece en el intervalo  $(0, 2/3)$

### 3. Extremos de una función

Suponemos una función  $f(x)$  continua en un punto  $x_0$ .

- $f(x)$  tiene un **máximo relativo en**  $x_0 \equiv$

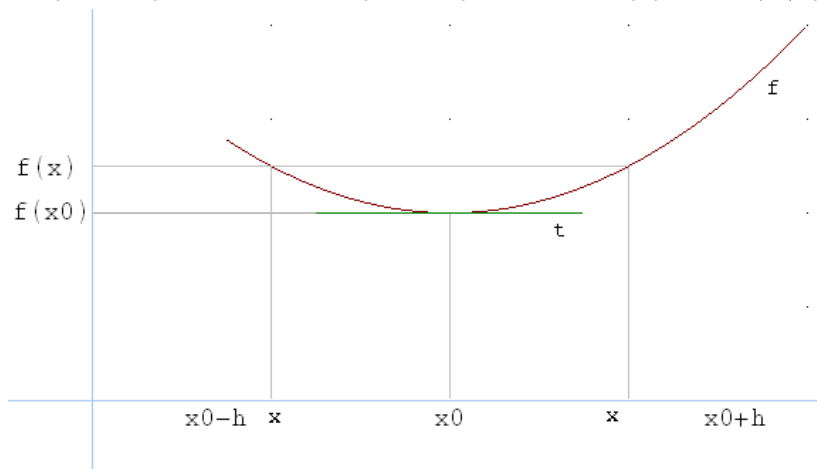
$$\exists (x_0 - r, x_0 + r) / \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r), x \neq x_0 \quad f(x) < f(x_0)$$



$x_0$  es el punto de mayor ordenada de entre sus próximos

•  $f(x)$  tiene un **mínimo relativo en  $x_0$**   $\equiv$

$$\exists (x_0 - r, x_0 + r) / \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r), x \neq x_0 \quad f(x) > f(x_0)$$



$x_0$  es el punto de menor ordenada de entre sus próximos

Los máximos y mínimos relativos de una función  $f$  se llaman **extremos** relativos. Un resultado importante es el que vemos a continuación.

### 3.1 Condición necesaria de extremo

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \text{ derivable en } x_0 \\ f(x) \text{ alcanza un extremo en } x_0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

*Demostración*

Si fuese  $f'(x_0) \neq 0$  entonces  $\begin{cases} f'(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ crece en } x_0 \\ 0 \\ f'(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ decrece en } x_0 \end{cases}$  lo que contradice, en ambos casos, la hipótesis de alcanzar un extremo en  $x_0$ .

Esta condición nos dice que, necesariamente, la recta tangente a la curva  $y = f(x)$  es horizontal, su pendiente  $f'(x_0)$  es 0.

El recíproco es falso; la función  $f(x) = x^3$  cumple  $f'(0) = 0$  y, sin embargo,  $f$  no tiene extremo en  $x_0 = 0$  al ser creciente en  $\mathbb{R}$ .

### 3.2 Condición suficiente de extremo (Criterio de la segunda derivada)

$f(x)$  derivable en  $x_0$  dos veces

$$f'(x_0) = 0 \text{ y } \begin{cases} f''(x_0) > 0 \Rightarrow \text{Mínimo relativo} \\ f''(x_0) < 0 \Rightarrow \text{Máximo relativo} \end{cases} \text{ en } x_0$$

*Demostración*

Suponemos  $f'(x_0) = 0$ .

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f'$  creciente en  $x_0 \Rightarrow$  para valores  $x$  de un intervalo  $(x_0 - r, x_0 + r)$  se tiene  
 $\{ x < x_0 \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0 \Rightarrow f$  decrece a la izquierda de  $x_0$   
 $\{ x > x_0 \Rightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0 \Rightarrow f$  crece a la derecha de  $x_0$  por lo que  $f(x)$  alcanza un  
mínimo relativo en  $x_0$  que es lo que queríamos demostrar.

Análogo a la demostración anterior para  $f''(x_0) < 0$ .

Los puntos de primera derivada nula se llaman **puntos críticos**. En funciones derivables, los extremos se encuentran entre los puntos críticos.

## Ejemplo 2

Determina los extremos de la función  $f(x) = x^3 - x^2$  del ejemplo anterior.

### Resolución

Por la información del ejemplo 1 tenemos:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2/3)$	$(2/3, +\infty)$
Signo de $f'(x) = 3x^2 - 2x$	+ Crece	- Decrece	+ Crece

En consecuencia, puesto que  $f(x)$  está definida en  $x = 0$  y en  $x = 1/2$ , en el punto  $P(0, 0)$ ,  $f(x)$  alcanza un máximo relativo y un mínimo relativo en el punto  $Q(2/3, f(2/3))$ .

Si no tuviéramos la información del ejemplo 1 utilizamos el criterio de la segunda derivada:

1º) Primera derivada  $f'(x) = 3x^2 - 2x$

2º) Segunda derivada  $f''(x) = 6x - 2$

3º) Puntos críticos  $f'(x) = 3x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x \cdot (3x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2/3 \end{cases}$

4º) Evaluamos  $f''(x)$  en los puntos críticos :

$$f''(0) = -2 < 0 \Rightarrow \text{Máximo relativo en } P(0, 0)$$

$$f''(2/3) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo relativo en } Q(2/3, f(2/3))$$

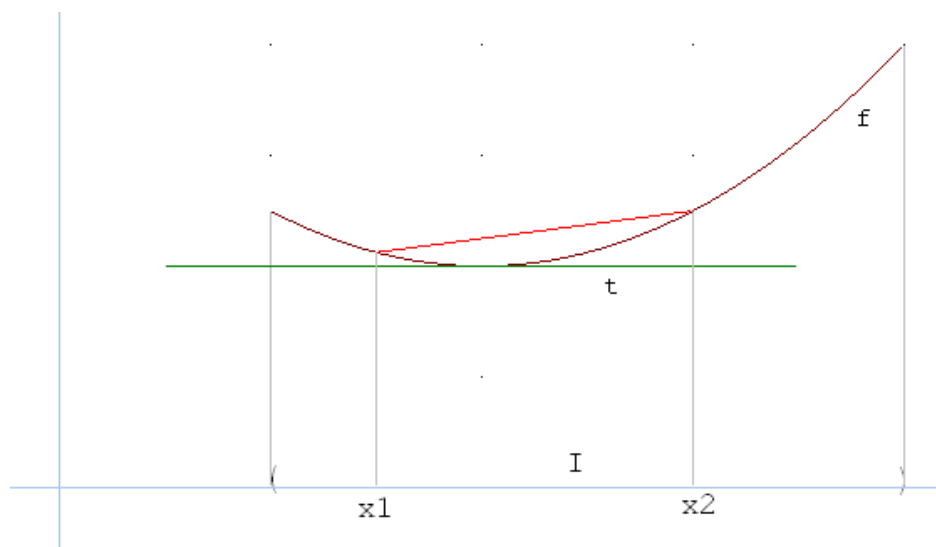
## 4. Curvatura de una función

### 4.1 Concavidad y convexidad

Suponemos una función  $f(x)$  continua en un intervalo  $I$ .

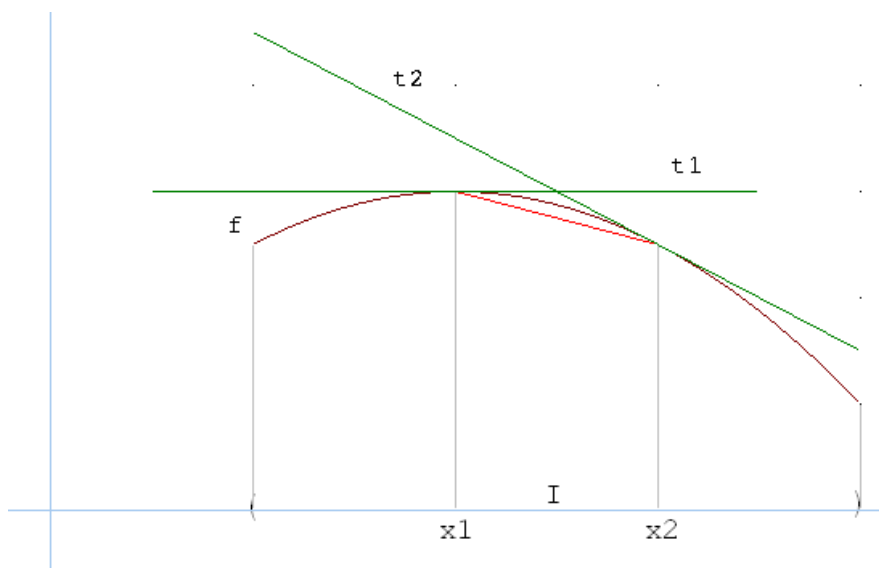
•  $f(x)$  es **cóncava en**  $I \equiv \forall x_1, x_2 \in I$ , el segmento de extremos  $P(x_1, f(x_1))$  y  $Q(x_2, f(x_2))$  queda por encima de la gráfica.

La recta tangente en cualquier punto del intervalo queda por debajo de la gráfica.



- $f(x)$  es **convexa en  $I$**   $\equiv \forall x_1, x_2 \in I$ , el segmento de extremos  $P(x_1, f(x_1))$  y  $Q(x_2, f(x_2))$  queda por debajo de la gráfica.

La recta tangente en cualquier punto del intervalo queda por encima de la gráfica.



Observemos que si  $f$  es derivable de orden dos en  $I$  y

-  $f$  es cóncava en  $I$ , las pendientes  $f'(x)$  de las sucesivas rectas tangentes en los puntos  $x$  del intervalo  $I$  van creciendo y, por tanto,  $(f')'(x) = f''(x) > 0$ .

-  $f$  es convexa en  $I$ , las pendientes  $f'(x)$  de las sucesivas rectas tangentes en los puntos  $x$  del intervalo  $I$  van decreciendo y, por tanto,  $(f')'(x) = f''(x) < 0$ .

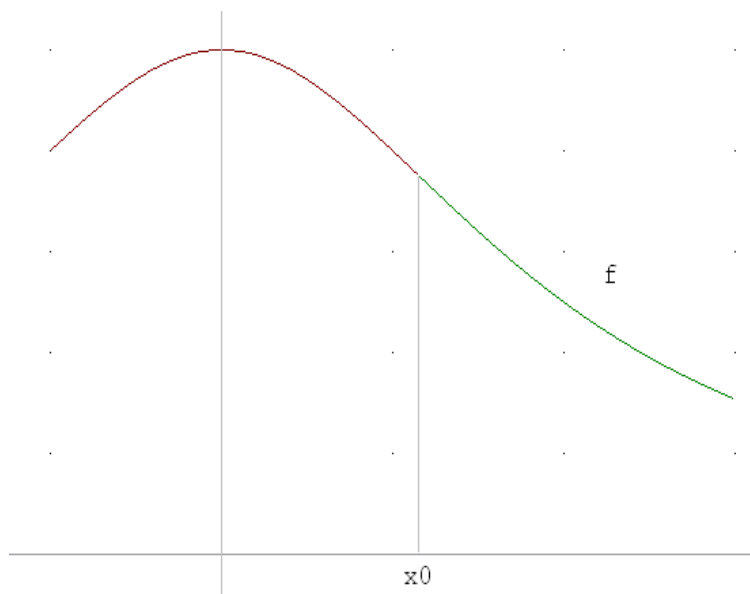
#### 4.2 Condición suficiente de curvatura

El signo de la segunda derivada nos proporciona la condición suficiente de curvatura para funciones derivables en un intervalo  $I$ :

$$\forall x \in I \begin{cases} f''(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ cóncava en } I \\ f''(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ convexa en } I \end{cases}$$

#### 4.3 Puntos de inflexión

Una función  $f(x)$  tiene un **punto de inflexión** en un punto  $x_0 \in \text{Dom}(f) \equiv$  la función pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava en dicho punto.



---

### Ejemplo 3

Determina la curvatura y los puntos de inflexión de la función  $f(x) = x^3 - x^2$ .

#### Resolución

Estudiamos el signo de la segunda derivada  $f''(x) = 6x - 2 \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$

$$6x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1/3$$

La recta real queda dividida en dos intervalos,  $(-\infty, 1/3)$  y  $(1/3, +\infty)$

	$(-\infty, 1/3)$	$(1/3, +\infty)$
Signo de $f''(x) = 6x - 2$	-	+
	Convexa	Cóncava

En  $x = 1/3$ , la función pasa de ser convexa a ser cóncava; por tanto en  $x = 1/3$  hay un punto de inflexión,  $P\left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{27}\right)$  donde  $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-2}{27}$

---

#### 4.4 Condición necesaria para puntos de inflexión

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \text{ derivable en } x_0 \text{ dos veces} \\ f(x) \text{ tiene punto de inflexión en } x_0 \end{array} \right\} \Rightarrow f''(x_0) = 0$$

Demostración

Si  $f''(x_0) \neq 0$  entonces  $\begin{cases} f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ cóncava en } x_0 \\ 0 \\ f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ convexa en } x_0 \end{cases}$  lo que contradice, en ambos

casos, la hipótesis de tener punto de inflexión en  $x_0$ .

El recíproco es falso; la función  $f(x) = x^4$  cumple  $f''(0) = 0$  y, sin embargo,  $f$  no tiene punto de inflexión en  $x_0 = 0$ .

#### 4.5 Condición suficiente para puntos de inflexión (Criterio de la tercera derivada)

**$f(x)$  derivable en  $x_0$  tres veces**

**$f''(x_0) = 0$  y  $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow f(x)$  tiene un punto de inflexión en  $x_0$**

Demostración

Suponemos  $f''(x_0) = 0$ .

$f'''(x_0) > 0 \Rightarrow f''$  creciente en  $x_0 \Rightarrow$  para valores  $x$  de un intervalo centrado en  $x_0$ ,  $(x_0 - r, x_0 + r)$  se tiene

$\begin{cases} x < x_0 \Rightarrow f''(x) < f''(x_0) = 0 \Rightarrow f \text{ convexa a la izquierda de } x_0 \\ x > x_0 \Rightarrow f''(x) > f''(x_0) = 0 \Rightarrow f \text{ cóncava a la derecha de } x_0 \end{cases}$  por lo que  $f(x)$  tiene un punto de inflexión en  $x_0$  que es lo que queríamos demostrar.

Análogo a la demostración anterior para  $f'''(x_0) < 0$ .

---

### Ejemplo 4

Determina los puntos de inflexión de la función  $f(x) = x^3 - x^2$ .

#### Resolución

Calculamos la segunda derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x ; f''(x) = 6x - 2$$

Puntos que anulan  $f''(x)$ :

$$6x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1/3$$

Calculamos la tercera derivada  $f'''(x) = 6$  y sustituimos el valor obtenido

$$f'''\left(\frac{1}{3}\right) = 6 \neq 0$$

Según el criterio que hemos estudiado hay un punto de inflexión en el punto de abscisa  $x = 1/3$ , el punto  $P\left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{27}\right)$ .

---

## 5. Problemas de optimización

En muchos problemas nos encontramos con situaciones en las que tenemos que maximizar o minimizar funciones cuyas variables están sujetas a ciertas restricciones. Pensemos, por ejemplo, en aplicaciones en las que hay que determinar el área mínima, el menor coste, el mayor beneficio, etc.

Se tratan de **problemas de optimización** que se pueden resolver utilizando el cálculo diferencial.

En términos generales, un problema de optimización consiste en determinar el valor máximo o mínimo (optimizar) que toma una cierta función, llamada *función objetivo*, así como el valor de las variables que la optimizan, las cuales están sujetas a unas condiciones dadas.

La *solución óptima* es aquella que satisface la restricción del problema y hace que la función objetivo sea máxima o mínima en ellos.

Forma general de un problema de optimización en dos variables  $x$  e  $y$ :

$$\begin{array}{ll} \text{Optimizar } f(x, y) & \text{Función objetivo} \\ \text{Sujeto a } g(x, y) = k & \text{Restricción} \end{array}$$

### 5.1 Pasos para resolver un problema de optimización

1. Descripción gráfica, si procede, y definición de las variables que intervienen.
2. Establecer la función objetivo  $f(x, y)$ .
3. Plantear la ecuación  $g(x, y) = k$  que liga las variables.
4. Despejar de la restricción una de las variables, de forma que la expresión resultante sea la más sencilla, y sustituirla en la función objetivo; así, ésta será función en una variable.
5. Encontrar los puntos críticos resolviendo la ecuación  $f' = 0$ .
6. Aplicar el criterio de la segunda derivada para determinar la solución óptima.
7. Calcular la variable despejada en el punto 4.
8. Responder de forma clara lo que nos pide el problema.

---

### Ejemplo 5

Disponemos de 200 m de tela metálica. Halla las dimensiones del campo rectangular de mayor área posible que se puede cercar con dicha tela.

#### Planteamiento del problema

Sean  $x$  e  $y$  las dimensiones, en metros, del campo rectangular (largo y ancho).

La función a maximizar es el área del rectángulo.

El perímetro del campo es  $2x + 2y$  que se corresponde con los 200 m de tela disponibles. El problema es:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar } A(x, y) = x \cdot y & \\ \text{s. a } & 2x + 2y = 200 \end{array}$$

o equivalentemente:

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar } A(x, y) = x \cdot y & \text{función objetivo} \\ \text{s. a } & x + y = 100 \quad \text{restricción} \end{array}$$

#### Resolución

Despejamos una incógnita de relación  $x + y = 100$ :

$$y = 100 - x \quad [1]$$

y la sustituimos en la función objetivo, que pasa a ser de una variable:

$$A(x) = x \cdot (100 - x) = 100x - x^2$$

Hallamos los puntos críticos de la función área:

$$A'(x) = 100 - 2x ; 100 - 2x = 0 \Rightarrow x = 50$$

y comprobamos que se trata de un máximo utilizando el criterio de la segunda derivada:

$$A''(x) = -2 ; A''(50) = -2 < 0$$

Por tanto el área máxima se obtiene cuando  $x = 50$  metros que al sustituir en [1] nos da el ancho  $y = 50$  metros.

Las dimensiones del campo rectangular de mayor área posible, son las de un campo cuadrado de 50 metros de lado y  $A = 50^2 = 2500 \text{ m}^2$ .

Por tanto deben venderse 15 unidades diarias para obtener un beneficio máximo de  $B(15) = 87'5$  euros.

---

### **Ejemplo 6**

*El coste de producción de  $x$  unidades diarias de un determinado producto viene dado por  $C(x) = \frac{1}{4}x^2 + 35x + 25$  y el de venta de una de ellas es  $(50 - \frac{x}{4})$  euros. Halla el número de unidades que deben venderse diariamente para que el beneficio sea máximo.*

### **Resolución**

El beneficio viene dado por  $B(x) = x(50 - \frac{x}{4}) - (\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25) = -\frac{1}{2}x^2 + 15x - 25$

Hallamos el máximo de esta función:

$$B'(x) = -x + 15; B'(x) = 0 \Rightarrow -x + 15 = 0 \Rightarrow x = 15$$

$$B''(15) = -1 < 0 \text{ máximo en } x = 15$$

Se deben fabricar 15 unidades obteniendo un beneficio máximo de  $B(15) = 87'5$  euros.

---