Tema 7: Derivada de una función

Antes de dar la definición de derivada de una función en un punto, vamos a introducir dos ejemplos o motivaciones iniciales que nos van a dar la medida de la importancia de esta herramienta en matemáticas; uno va a ser el cálculo de la velocidad instantánea de un móvil y otro el de la pendiente de la recta tangente a una curva en uno de sus puntos.

1. Motivaciones iniciales

1.1 Velocidad instantánea de un móvil

Supongamos un móvil que se desplaza según una función espacio S que depende del tiempo transcurrido t, $S = f(t)$ y consideremos un intervalo de tiempo cualquiera $[t_0, t_0 + h]$. Supongamos que, en los instantes t_0 y $t_0 + h$, el móvil se encuentra en los puntos $P(t_0, f(t_0))$ y $Q(t_0 + h, f(t_0 + h))$ respectivamente, como muestra el gráfico.

El espacio recorrido desde P hasta Q es $f(t_0 + h) - f(t_0)$.

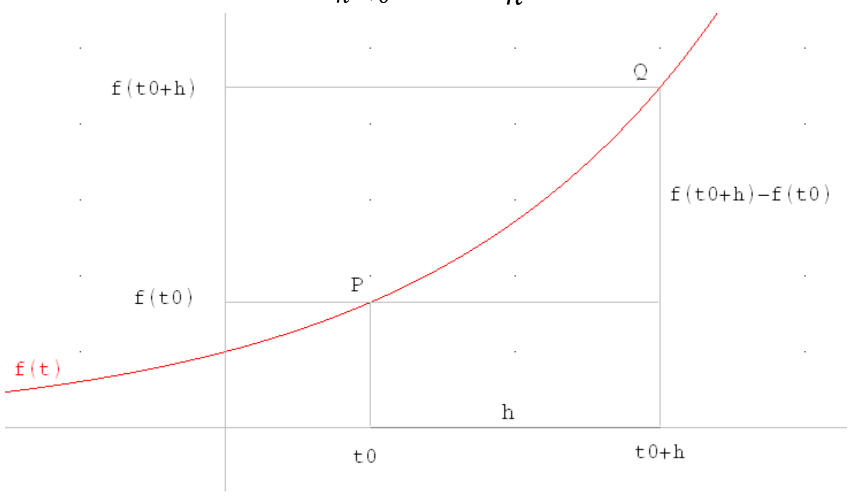
La **velocidad media** del móvil, v_m, en el intervalo de tiempo $[t_0, t_0 + h]$, es el cociente entre el espacio recorrido y el tiempo transcurrido h, es decir, la tasa de variación media de la función f en ese intervalo:

$$v_m = T.V.M[t_0, t_0 + h] = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

Es claro que no es lo mismo la velocidad media en el intervalo de tiempo $[t_0, t_0 + h]$ que la que lleva en el instante t_0. Para determinar la **velocidad instantánea** en el momento t_0 bastará hacer el intervalo $[t_0, t_0 + h]$ todo lo pequeño posible, es decir considerar el límite cuando $h \longrightarrow 0$.

La velocidad instantánea del móvil, v_i, en el instante t_0 es:

$$v_i(t_0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$



Ejemplo 1

Una persona lanza un balón al aire. La ecuación de movimiento del balón viene dada por $f(t) = -t^2 + 6t$, donde t viene expresada en segundos y $f(t)$ en metros. Calcula la velocidad del balón al cabo de 2 segundos y el instante en el que la velocidad es 0.

Resolución

La velocidad instantánea del balón a los 2 segundos de ser lanzado al aire es:

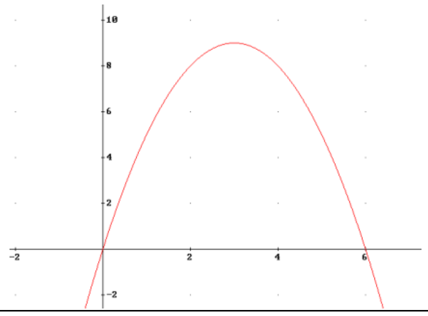
$$v_i(2) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{-(2+h)^2 + 6\cdot(2+h) - 8}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{-h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{h\cdot(2-h)}{h} = 2\ m/s$$

Para calcular el instante t_0 en el que la velocidad es 0, hacemos $v_i(t_0) = 0$:

$v_i(t_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{-(t_0+h)^2+6\cdot(t_0+h)-(-{t_0}^2+6\cdot t_0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h^2-2t_0h+6h}{h} =$
$\lim\limits_{h \to 0} (h - 2t_0 + 6) = 6 - 2t_0$

$$v_i(t_0) = 0 \Leftrightarrow 6 - 2t_0 = 0 \Leftrightarrow t_0 = 3\,s$$

Al cabo de 3 segundos, la velocidad es 0.
(A los 3 s el balón ha alcanzado su máxima altura, está en el vértice $V(3,9)$ de la parábola que describe y empieza a caer)

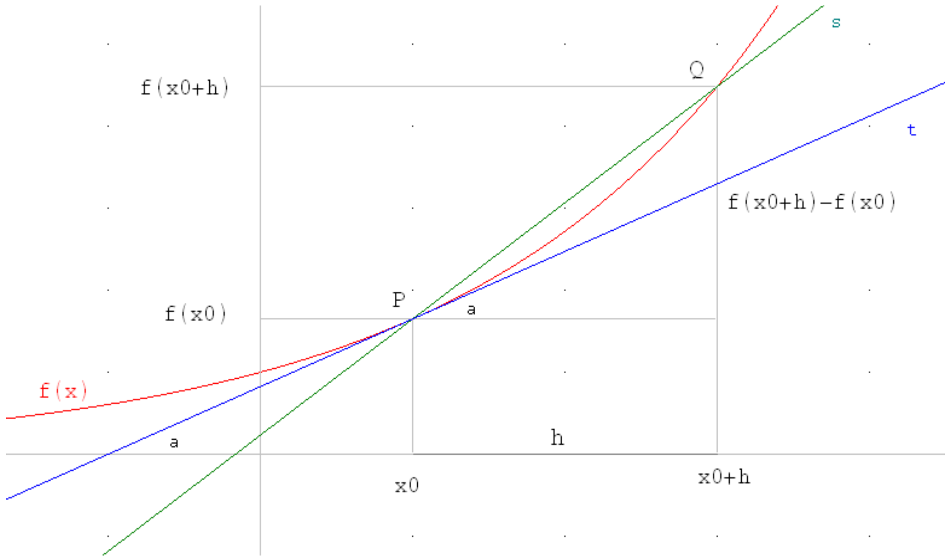


1.2 Pendiente de la recta tangente a una curva en uno de sus puntos

Consideremos una función $y = f(x)$ y un punto de ella $P\big(x_0, f(x_0)\big)$. Vamos a calcular la pendiente m de la recta tangente t a la curva $y = f(x)$ en el punto P.
La pendiente de una recta es el valor de la tangente del ángulo $\hat{a}$ que determina con el eje de abscisas, $m = tg\hat{a}$
Consideramos otro punto $Q\big(x_0 + h, f(x_0 + h)\big)$ de la curva y determinamos la pendiente de la recta s que pasa por P y Q:
Vector de dirección de la recta s: $\overrightarrow{PQ} = \big((h, f(x_0 + h) - f(x_0)\big)$
Pendiente de la recta s: $m_s = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
Para determinar la pendiente de la recta tangente t en el punto P bastará acercar el punto Q al punto P sobre la curva, o lo que es lo mismo hacer $h \to 0$; las pendientes de las respectivas secantes estarán cada vez más cerca del valor m que buscamos. Por tanto:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

y la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P\big(x_0, f(x_0)\big)$ será
$t \equiv y - f(x_0) = m \cdot (x - x_0)$



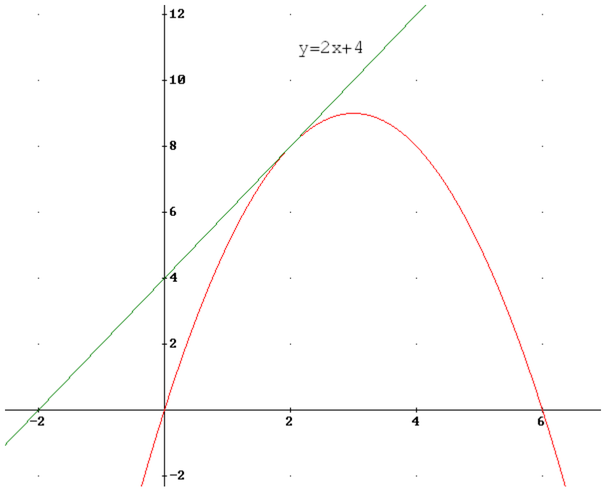
Ejemplo 2

Consideremos la función $f(x) = -x^2 + 6x$. Vamos a calcular la pendiente de la recta t tangente a la parábola en el punto de abscisa $x = 2$ y su ecuación.

Resolución

La pendiente de la recta tangente en el punto de coordenadas $(2,8)$ viene dada por

$$m = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-(2+h)^2+6\cdot(2+h)-8}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h^2+2h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h\cdot(2-h)}{h} = 2$$



Su ecuación es $t \equiv y - f(x_0) = m\cdot(x - x_0) \Leftrightarrow y - 8 = 2\cdot(x-2) \Leftrightarrow y = 2x + 4$

2. Derivada de una función en un punto

Hemos visto que hemos llegado a la misma expresión-solución de dos problemas distintos. Podemos plantear otras situaciones que conduce a esa misma expresión. Es por eso que vamos a darle un nombre y a estudiarla.

Se llama **derivada de una función** $f(x)$ en un punto x_0 de su dominio, y se escribe $f'(x_0)$, al límite del cociente incremental, si existe

$$\boldsymbol{f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

Se dice que f es derivable en x_0.

Por tanto:

(i) La velocidad instantánea de un móvil con ecuación de movimiento $S = f(t)$, en el instante t_0, es la derivada $f'(t_0)$.

(ii) La pendiente m de la recta tangente a la curva de ecuación $y = f(x)$ en el punto de abscisa x_0 es la derivada $f'(x_0)$.

2.1 Derivadas laterales

Cada uno de los límites laterales de la expresión anterior se llama **derivada lateral** (por la izquierda y por la derecha) de f en el punto x_0:

$$f'(x_0)^- = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad y \quad f'(x_0)^+ = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Cuando las dos derivadas laterales existen (son finitas) y son iguales, la función es derivable en x_0 y el resultado se llama derivada de la función en x_0.

Otra forma de expresar la derivada de una función f en el punto x_0 es

$$\boldsymbol{f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

donde se ha efectuado el cambio $x = x_0 + h$.

Ejemplo 3

Consideremos la función $f(x) = -x^2 + 6x$. Vamos a calcular la derivada, en el punto $x = 2$ con las dos expresiones [1] y [2] y, después, en un punto x cualquiera con la primera.

Resolución

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-(2+h)^2+6\cdot(2+h)-8}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h^2+2h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h\cdot(2-h)}{h} = 2$$

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{-x^2+6x-8}{x-2} \overset{0/0}{\triangleq} \lim_{x \to 2} -\frac{(x-2)\cdot(x-4)}{x-2} = \lim_{x \to 2} (4-x) = 2$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-(x+h)^2+6\cdot(x+h)-(-x^2+6x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-2xh-h^2+6h}{h} = -2x+6$$

Observemos que esta última expresión permite ahora calcular la derivada en un punto particular sin más que sustituirlo en ella, sin necesidad de volver a aplicar la definición de derivada otra vez.

Así, $f'(-1) \overset{[-2\cdot(-1)+6]}{\triangleq} 8$; $f'(1) \overset{[-2\cdot 1+6]}{\triangleq} 4$; $f'(1/2) \overset{[-2\cdot 1/2+6]}{\triangleq} 5$…

A la función $f'(x) = -2x + 6$ la llamamos función derivada o simplemente derivada de la función $f(x)$.

2.2 Función derivada

Dada una función f con dominio D, a la función f' que hace corresponder a cada $x \in D$ su derivada, se le llama **función derivada** o simplemente derivada de la función f.

$$\begin{aligned} f' : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow y = f'(x) \end{aligned}$$

Ejemplo 4

Halla la función derivada de la función $f(x) = \frac{1}{x-2}$ y calcula la derivada en $x = 1$ y $x = 1/2$. Prueba que f no es derivable en $x = 2$.

Resolución

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h-2} - \frac{1}{x-2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-h}{(x+h-2)\cdot(x-2)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x+h-2)\cdot(x-2)} = \frac{-1}{(x-2)^2}$$

Sustituyendo, tenemos que $f'(1) = -1$ y $f'(1/2) = -4/9$.

Como la función f no está definida en $x = 2$, no es continua, por lo que tampoco es derivable.

3. Operaciones con funciones derivables

Vamos a ver las propiedades de las funciones derivables respecto de las operaciones usuales. Demostramos alguna de ellas.

Consideramos dos funciones f y g derivables en el punto $x = a$ y $k \in \mathbb{R}$.

3.1 Derivada de una suma de funciones

$$\boldsymbol{(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)}$$

La derivada de una suma (resta) es la suma (resta) de derivadas.

3.2 Derivada del producto de número real por una función

$$\boldsymbol{(k \cdot f)'(a) = k \cdot f'(a)}$$

Demostración

$$(k \cdot f)'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{(k\cdot f)(a+h)-(k\cdot f)(a)}{h} = \mathrm{k} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = k \cdot f'(a)$$

La derivada de la función $k \cdot f$ es igual a la constante k multiplicada por la derivada de f.

3.3 Derivada del producto de dos funciones

$$(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g})'(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{a})$$

3.4 Derivada de la inversa $1/f$ de una función f

Si $f(a)\neq 0$

$$\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{f}}\right)'(\boldsymbol{a})=\frac{-\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})}{[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})]^2}$$

Demostración

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{1}{f}\right)(a+h)-\left(\frac{1}{f}\right)(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{f(a+h)}-\frac{1}{f(a)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a+h)}{h\cdot f(a+h)\cdot f(a)}=$$

$$=-\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h\cdot}\cdot\frac{1}{f(a+h)\cdot f(a)}\right]=-\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h\cdot}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{f(a+h)\cdot f(a)}=\frac{-f'(a)}{[f(a)]^2}$$

3.5 Derivada del cociente de dos funciones

Si $g(a)\neq 0$

$$\left(\frac{\boldsymbol{f}}{\boldsymbol{g}}\right)'(\boldsymbol{a})=\frac{\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{a})}{[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})]^2}$$

3.6 Derivada de la composición de dos funciones

$$(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g})'(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}))\cdot\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{a})$$

conocida como regla de la cadena en la que se supone g derivable en $x=a$ y f derivable en $g(a)$.

4. Derivada de funciones elementales simples

4.1 Derivada de la función constante

Sea $k\in\mathbb{R}$. La derivada de la función constante $f(x)=k$ es $f'(x)=0$.

4.2 Derivada de la función identidad

$$f(x)=x\ ;\ f'(x)=1$$

Demostración

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=1$$

4.3 Derivada de funciones potenciales

$$\alpha\in\mathbb{R};\ f(x)=x^{\alpha}\ ;\ f'(x)=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$$

4.4 Derivada de la función raíz cuadrada

$$f(x)=\sqrt{x}\ \ ;\ \ f'(x)=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$$

Es un caso particular de función potencial para $\alpha=1/2$.

4.5 Derivada de funciones exponenciales

$$a\in\mathbb{R},a>0,a\neq 1;\ \ f(x)=a^x\ ;\ \ f'(x)=a^x\cdot La$$

$$\text{En particular,}\ \ f(x)=e^x\ ;\ \ f'(x)=e^x$$

4.6 Derivada de funciones logarítmicas

$$a\in\mathbb{R},a>0,a\neq 1;\ \ f(x)=\log_a x\ \ ;\ \ f'(x)=\frac{1}{x}\cdot\log_a e$$

$$\text{En particular,}\ \ f(x)=Lx=lnx\ ;\ \ f'(x)=\frac{1}{x}$$

4.7 Derivada de funciones trigonométricas

$$f(x)=senx\ ;\ f'(x)=cosx$$

$$f(x)=cosx\ ;\ f'(x)=-senx$$

$$f(x)=tgx\ ;\ f'(x)=\frac{1}{cos^2x}=sec^2x=1+tg^2x$$

Ejemplo 5

Calcula la derivada de las funciones siguientes:

a) $f(x) = 3x^2$

b) $f(x) = 3x^2 + 2x - 3$

c) $f(x) = \frac{2}{x^4} = 2 \cdot \frac{1}{x^4}$

d) $f(x) = \frac{1-x}{x+2}$

e) $f(x) = \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} \cdot e^x$

Resolución

a) Aplicando 3.2 y 4.3 obtenemos $f'(x) = 6x$

b) Aplicando 3.1, 3.2, 4.1 y 4.2 obtenemos $f'(x) = 6x + 2$

c) Aplicando 3.2, 3.4 y 4.3 obtenemos $f'(x) = 2 \cdot \frac{-4x^3}{x^8} = \frac{-8}{x^5}$

d) Aplicando 3.5, 3.1, 4.1 y 4.2 obtenemos $f'(x) = \frac{-(x+2)-(1-x)}{(x+2)^2} = \frac{-3}{(x+2)^2}$

e) Aplicando 3.2 y 4.5 obtenemos $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot e^x = \frac{e^x}{2}$

5. Derivada de funciones elementales compuestas

Para justificar las reglas que nos van a permitir derivar funciones compuestas, vamos a ver un ejemplo en el que utilizamos la regla de la cadena 3.6.

Ejemplo 6

Calculemos la derivada de la función $u(x) = (1 + 2x)^5$

Resolución

La función $u(x)$ es composición de las funciones $f(x) = 1 + 2x$ y $g(x) = x^5$.

$$x \xrightarrow{f} 1 + 2x \xrightarrow{g} (1 + 2x)^5$$
$$g\big(f(x)\big) = (g \circ f)(x) = u(x)$$

Como $f'(x) = 2$ y $g'(x) = 5x^4$, aplicando 3.6 tenemos:

$u'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = g'(1 + 2x) \cdot 2 = 5 \cdot (1 + 2x)^4 \cdot 2 = 10 \cdot (1 + 2x)^4$

Aplicando un razonamiento similar para cualquier función compuesta obtenemos las reglas que vemos a continuación.

5.1 Derivada de la función potencial

$$\alpha \in \mathbb{R};\ f(x) = [u(x)]^\alpha \ ; \ f'(x) = \alpha \cdot [u(x)]^{\alpha-1} \cdot u'(x)$$

5.2 Derivada de la función raíz cuadrada

$$f(x) = \sqrt{u(x)} \ ; \ f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{u(x)}} \cdot u'(x)$$

Es un caso particular de función potencial para $\alpha = 1/2$.

5.3 Derivada de funciones exponenciales

$$a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1;\ f(x) = a^{u(x)} \ ; \ f'(x) = a^{u(x)} \cdot u'(x) \cdot La$$

$$\text{En particular, } f(x) = e^{u(x)} \ ; \ f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$$

5.4 Derivada de funciones logarítmicas

$$a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1;\ f(x) = \log_a u(x) \ ; \ f'(x) = \frac{1}{u(x)} \cdot \mathrm{u}'(\mathrm{x}) \cdot \log_a e$$

$$\text{En particular, } f(x) = L[u(x)] = ln[u(x] \ ; \ f'(x) = \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)$$

5.5 Derivada de funciones trigonométricas

$$f(x) = sen[u(x)] \ ; \ f'(x) = cos[u(x)] \cdot u'(x)$$
$$f(x) = cos[u(x)] \ ; \ f'(x) = -sen[u(x)] \cdot u'(x)$$
$$f(x) = tg[u(x)] \ ; \ f'(x) = \frac{1}{cos^2[u(x)]} \cdot u'(x) = [1 + tg^2 u(x)] \cdot u'(x)$$

6. Continuidad y derivabilidad

La relación entre estos dos conceptos queda determinada por la proposición siguiente:

[1] Toda función f derivable en un punto x_0 es continua en dicho punto.

Demostración

Como f es derivable en x_0, existe $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Por otro lado,

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} \left[(x - x_0) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right] = \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$
$$= 0 \cdot f'(x_0) = 0$$

de donde $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ con lo que $f(x)$ es continua en el punto x_0.

Como consecuencia:

[2] Si f no es continua en un punto x_0 entonces no es derivable en x_0.

Ejemplo 7

Estudia la derivabilidad en $x = 1$ de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \ x \leq 1 \\ 2x + 1 & si \ x > 1 \end{cases}$

Resolución

$x = 1$

$$f(1) = 1 \ ; \quad \lim_{x \to 1} f(x) \begin{cases} \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1 \\ \lim_{x \to 1^+} (2x + 1) = 3 \end{cases} \Longrightarrow \nexists \lim_{x \to 1} f(x)$$

Por tanto, la función no es continua en $x = 1$ y, en consecuencia, tampoco es derivable en dicho punto.

Ejemplo 8

Estudia la derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \ x \leq 1 \\ 2 - x & si \ x > 1 \end{cases}$

Resolución

a) $\forall x \in \mathbb{R} \ \ x < 1, \ \ f(x) = x^2$: continua por ser polinómica y $f'(x) = 2x$

$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ x > 1, \ \ f(x) = 2 - x$ continua por ser polinómica y $f'(x) = -1$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & si \ x < 1 \\ -1 & si \ x > 1 \end{cases} \qquad [1]$$

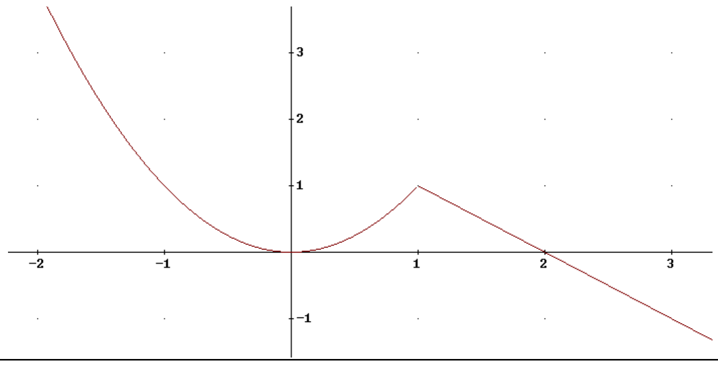
Caso $x = 1$

$$f(1) = 1 \ ; \quad \lim_{x \to 1} f(x) \begin{cases} \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1 \\ \lim_{x \to 1^+} (2 - x) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 1 \quad ; \quad f(1) = \lim_{x \to 1} f(x)$$

Por tanto la función es continua en $x = 1$.

Sustituyendo en [1], las derivadas laterales son $f'(1)^- = 2$ y $f'(1)^+ = -1$, con lo que f no es derivable en $x = 1$.

Resumiendo: $f(x)$ es continua en su dominio $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$.



7. Derivadas sucesivas

Hasta ahora sabemos obtener la función derivada $f'(x)$ de ciertas funciones elementales. Si calculamos la derivada de $f'(x)$ obtenemos $f''(x)$, derivada segunda de $f(x)$, y así, sucesivamente, obtenemos $f'''(x)$ … hasta obtener la derivada $n-ésima$ $f^{(n}(x)$ de la función f inicial.

Ejemplo 9

Obtener la derivada $n-ésima$ de la función $f(x)=e^{2x}$

Resolución

Calculamos las primeras derivadas hasta encontrar una fórmula para la derivada que nos piden:

$$f'(x)=2e^{2x}\ ;\ f''(x)=4e^{2x}\ ;\ f'''(x)=8e^{2x}\ ;\ \dots\dots;\ f^{(n}(x)=2^ne^{2x}$$