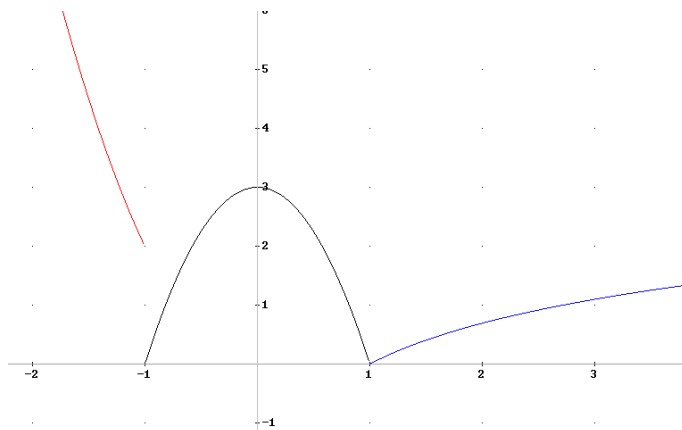


Tema 6: Continuidad de funciones

1. Continuidad de una función en un punto

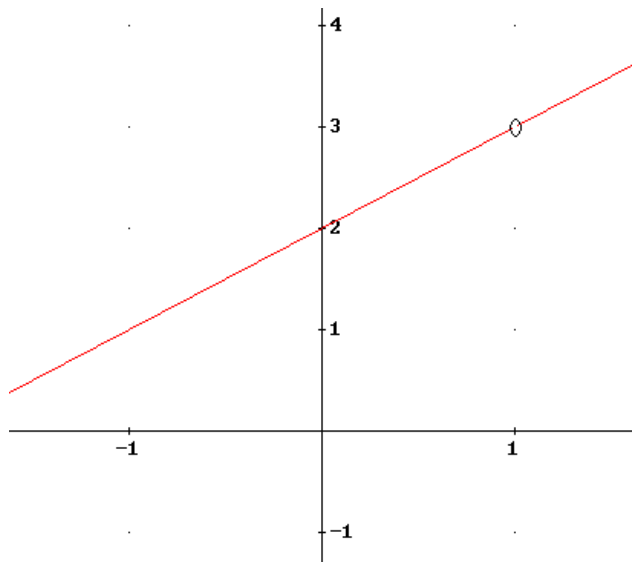
La idea intuitiva de función continua en un punto es bien sencilla, es aquella que “no da saltos ni presenta interrupciones”, que se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel. Lo contrario de continua es discontinua. Por ejemplo, la siguiente función es discontinua en el punto $x = -1$; si trazásemos una vertical en $x = -1$, no podríamos atravesarla sin levantar el lápiz. En cambio, la función es continua en los demás puntos x .



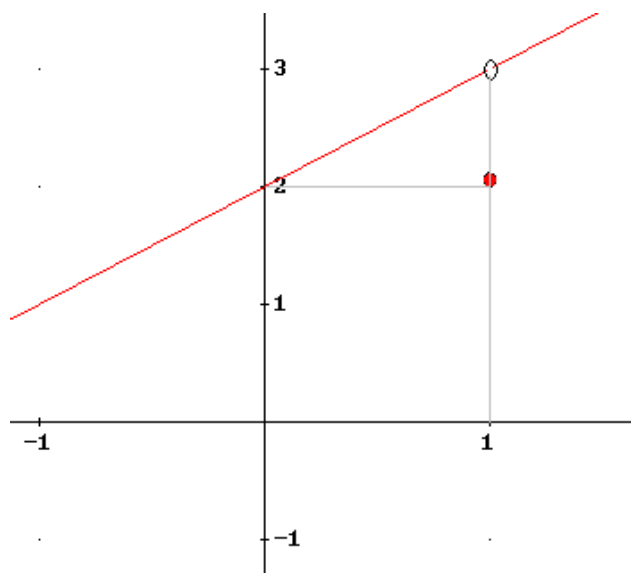
Nos preguntamos por las condiciones que deben darse para que una función $f(x)$ sea continua en un punto $x = a$. Lo haremos con situaciones que producen discontinuidades y que, por tanto, no deben darse.

Las gráficas siguientes, no son continuas en $x = 1$ por motivos diferentes; la primera [1] porque está indefinida en ese punto, no existe $f(1)$ y la segunda [2] porque, aunque si está definida en $x = 1$ y $f(1) = 2$, no coincide ese valor con el límite $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$.

[1]



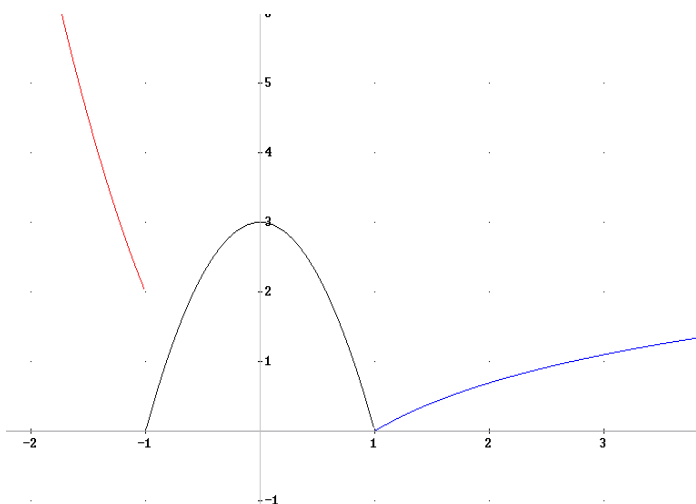
[2]



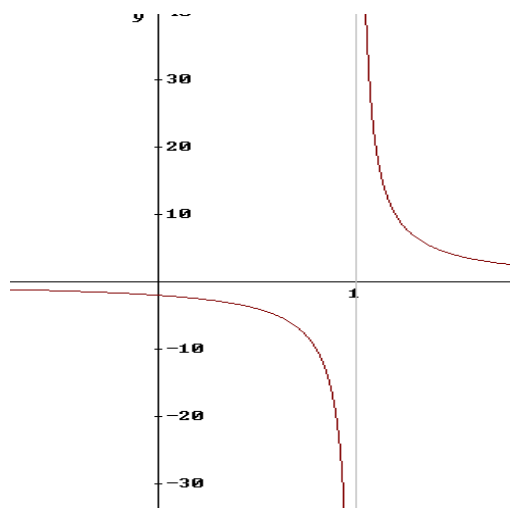
En la gráfica [3] la función no es continua en $x = -1$ porque los límites laterales en ese punto, aunque existen, son distintos, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2$ y $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0$.

En la [4], los límites laterales no existen, son infinitos, de ahí la discontinuidad en $x = 1$.

[3]



[4]



Por lo tanto, si queremos que una función sea continua en un punto, no deberán producirse las situaciones anteriores que producen discontinuidades.

La condición necesaria y suficiente para que una función $f(x)$ sea continua en $x = a$ es que se cumplan a la vez:

$$f(x) \text{ continua en } x = a \Leftrightarrow \begin{cases} 1^\circ \text{ Existe } f(a) \\ 2^\circ \text{ Existe } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \\ 3^\circ f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \end{cases}$$

2. Tipos de discontinuidad

Las situaciones gráficas descritas anteriormente muestran que existen distintos tipos de discontinuidades, unas más fuertes que otras, que clasificamos a continuación.

2.1 Discontinuidad evitable

La discontinuidad evitable de una función $f(x)$ en un punto $x = a$ se produce cuando no existe $f(a)$ y existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, como en la gráfica [1], o bien cuando existe $f(a)$, existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $f(a) \neq \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, como en la gráfica [2].

En ambos casos, redefiniendo la función en $x = a$ como $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, que es lo que se llama *verdadero valor de la función* en ese punto, se evita la discontinuidad.

2.2 Discontinuidad de salto finito

Este tipo de discontinuidad se produce cuando, en un punto $x = a$, los límites laterales existen y son distintos, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

La medida del salto es $\left| \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right|$.

La gráfica [3] presenta una discontinuidad de este tipo en $x = -1$, con salto 2.

2.3 Discontinuidad de salto infinito

Este tipo de discontinuidad se produce cuando, en un punto $x = a$, al menos uno de los límites laterales es infinito:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \text{ o } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$$

La gráfica [4] presenta una discontinuidad de salto infinito en $x = 1$.

3. Continuidad en un intervalo

Una función $f(x)$ es **continua en un intervalo abierto** (a, b) si es continua en todos y cada uno de los puntos del intervalo.

Una función es **continua en un intervalo cerrado** $[a, b]$ si es continua en todos los puntos del intervalo abierto (a, b) y, además, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Igualmente podemos definir la continuidad en los intervalos semiabiertos.

Las funciones elementales son continuas en sus dominios de definición:

[1] Las funciones polinómicas son continuas en el conjunto \mathbb{R} de los números reales.

[2] Las funciones racionales $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, cocientes de polinomios, son continuas en \mathbb{R} menos en aquellos valores que anulen el denominador $Q(x)$.

[3] Las funciones exponenciales $f(x) = a^x$, con $a > 0, a \neq 1$ y, en particular, $f(x) = e^x$ son continuas en \mathbb{R} .

[4] Las funciones logarítmicas $f(x) = \log_a x$, con $a > 0, a \neq 1$ y, en particular la función logaritmo neperiano $f(x) = Lx$, son continuas en su dominio $(0, +\infty)$.

[5] En las funciones con radicales tendremos en cuenta, además del índice par o impar de la raíz, el tipo de función que sea el radicando. $f(x) = \sqrt{x}$ es continua en $[0, +\infty)$.

[6] En las funciones a trozos se estudiarán con detenimiento aquellos valores en los que la función cambie de definición.

[7] En otros casos tendremos en cuenta que, en un intervalo $[a, b]$, la suma, resta, producto de funciones por números reales y producto de funciones continuas también lo es en dicho intervalo. El cociente de funciones continuas en $[a, b]$, también es continuo en dicho intervalo si la función divisor no se anula en él.

[8] Respecto de la composición de funciones:

$$\begin{cases} f(x) \text{ continua en } [a, b] \\ g(x) \text{ continua en } f([a, b]) \end{cases} \Rightarrow (g \circ f)(x) \text{ continua en } [a, b]$$

Resumiendo: Las operaciones con funciones continuas tienen como resultado otra función continua, siempre que tenga sentido la operación.

Ejemplo 1

Estudia y clasifica los puntos de discontinuidad de la función $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x-1}$

Resolución

Se trata de una función racional y, por tanto, es continua en el conjunto de los números reales salvo en aquellos valores que anulan el denominador $x - 1$.

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$. En consecuencia $f(x)$ continua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

Veamos qué tipo de discontinuidad presenta:

$$f(1) \text{ indefinido y } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (x+3)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+3) = 4$$

Se trata de una discontinuidad evitable en $x = 1$. Verdadero valor de la función en $x = 1$, $f(1) = 4$.

Ejemplo 2

Si $g(x)$ es una función polinómica, ¿qué se puede afirmar sobre la continuidad de la función

$$f(x) = \frac{g(x)}{x^3-1} ?$$

Resolución

La función $f(x)$ dada es un cociente de dos funciones polinómicas, continuas las dos en el conjunto de números reales; por tanto, $f(x)$ será una función continua en todos los puntos en los cuales la operación cociente tenga sentido.

$$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1} = 1$$

Teniendo en cuenta que el polinomio denominador se anula en $x = 1$, la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

Ejemplo 3

Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{si } x \leq -1 \\ -3x^2 + 3 & \text{si } -1 < x < 1 \\ Lx & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ clasificando sus discontinuidades. Representala gráficamente.

Resolución

Se trata de una función a trozos; los valores $x = -1$ y $x = 1$, dividen la definición de la función. Procedemos como sigue:

a) $\forall x \in \mathbb{R} \ x < -1$, $f(x) = 2x^2$: continua por ser función polinómica.

$\forall x \in \mathbb{R} \ -1 < x < 1$, $f(x) = -3x^2 + 3$: continua por ser función polinómica.

$\forall x \in \mathbb{R} \ x > 1$, $f(x) = Lx$: continua porque la función logarítmica lo es.

Estudiamos los valores que discriminan la definición de f .

Caso 1 $x = -1$

1] $f(-1) = 2$

2] $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} (2x^2) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} (-3x^2 + 3) = 0 \end{cases}$ Existen pero no coinciden los límites laterales. No existe $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

Discontinuidad de salto finito en $x = -1$, salto 2.

Caso 2 $x = 1$

1] $f(1) = L1 = 0$

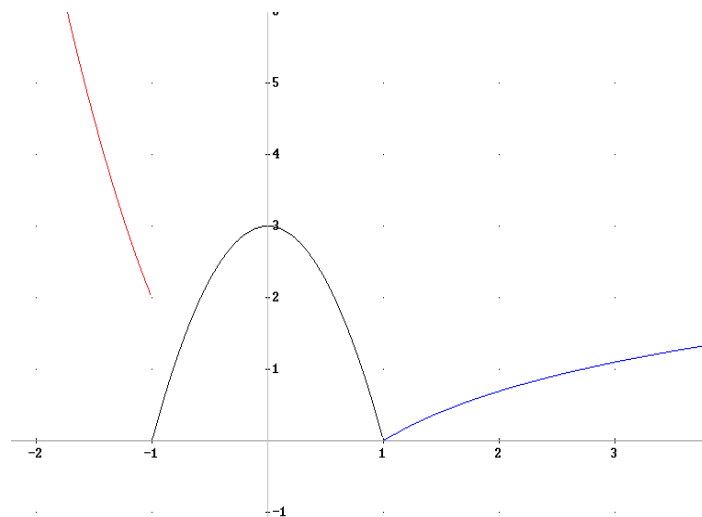
2] $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} (-3x^2 + 3) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (Lx) = 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

3] $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$f(x)$ continua en $x = 1$

$f(x)$ continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$

Representación gráfica:



Ejemplo 4

Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{1-x^2} & \text{si } x \neq 1 \\ \frac{-1}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$ clasificando sus discontinuidades

Resolución

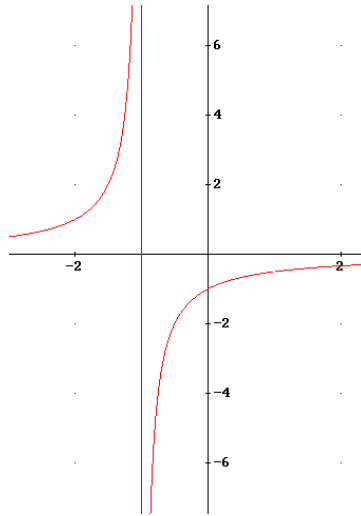
La función $g(x) = \frac{x-1}{1-x^2}$, función racional, no es continua en los valores que anulan el polinomio denominador $1-x^2 = 0$, que son $x = -1$ y $x = 1$. Según está definida $f(x)$ debemos estudiar que ocurre en $x = -1$ (por anular denominador) y $x = 1$ (por tener distinta definición en el valor y en sus proximidades).

Caso 1 $x = -1$

1] $f(-1)$ no definido

$$2] \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{1-x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-1}{1-x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} -\infty \end{cases}$$

Los dos límites laterales son infinitos; por tanto la función $f(x)$ presenta una discontinuidad de salto infinito en $x = -1$. La recta $x = -1$ es asíntota vertical



Caso 2 $x = 1$

1] $f(1) = -\frac{1}{2}$

$$2] \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{1-x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{-(x-1) \cdot (x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{x+1} = -\frac{1}{2}$$

3] $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

La función $f(x)$ es continua en $x = 1$.

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$
