Tema 4: Programación lineal

1. Introducción

La programación lineal es una técnica matemática relativamente reciente (siglo XX) que consiste en una serie de métodos y procedimientos que permiten resolver problemas de optimización. En general, podemos decir que el objetivo de la programación lineal es resolver ciertos tipos de problemas en los que se busca la mejor decisión posible entre un conjunto de alternativas con recursos limitados. Se trata de optimizar (hacer máxima o mínima, según los casos) una función (llamada función objetivo) sujeta a una serie de restricciones dadas mediante un sistema de inecuaciones lineales. El adjetivo "lineal" significa que se requiere que todas las funciones matemáticas en este modelo sean funciones lineales.

2. Inecuaciones lineales con dos incógnitas

Una inecuación lineal con dos variables es una expresión de la forma:

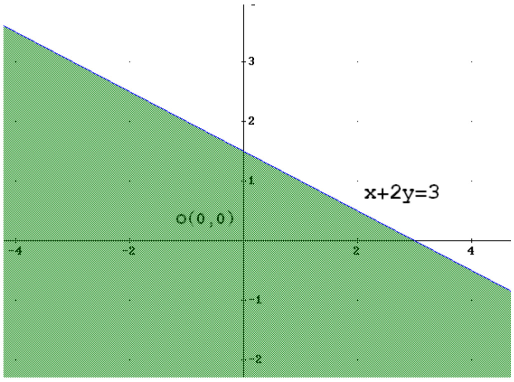
$$ax + by \leq c$$

(donde el símbolo $\leq$ puede ser también $\geq$, $<$ o bien $>$) y donde a, b y c son números reales y x e y son las incógnitas.

Para resolver estas inecuaciones, hay que representar gráficamente en el plano la recta $ax + by = c$ y marcar una de las dos regiones (semiplanos) en que dicha recta divide al plano. Para saber de qué región se trata, lo más habitual es tomar un punto que no pertenezca a la recta y comprobar si satisface la inecuación; en caso afirmativo se considerará la solución dada por el conjunto de puntos del semiplano al que pertenezca el punto tomado y en caso contrario el otro semiplano.

Ejemplo 1

Para resolver la inecuación $x + 2y \leq 3$, representamos la recta $x + 2y = 3$, consideramos el origen $O(0,0)$, que no pertenece a ella, y comprobamos que satisface la inecuación, $0 + 2 \cdot 0 \leq 3$, con lo que la solución es el semiplano (en verde) que lo contiene.



También podemos resolver la inecuación despejando la incógnita y de la expresión $x + 2y \leq 3$, poniendo cuidado en que si en una inecuación multiplicamos o dividimos por un número negativo, la desigualdad cambia de sentido.

En nuestro caso $y \leq \frac{3-x}{2}$

Observando el dibujo vemos que la recta divide al eje de ordenadas (y) en dos partes. La solución de la inecuación será aquella parte en la que la y sea menor que la recta, es decir, la parte inferior.

---

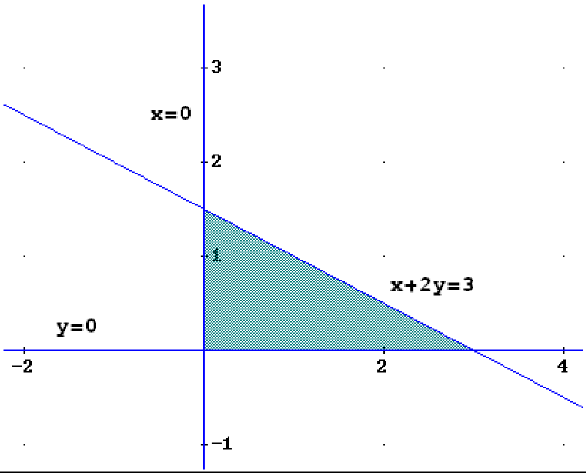
3. Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas

Un sistema de inecuaciones lineales, por tanto, es un conjunto de inecuaciones del tipo anterior, y resolverlo consistirá en resolver gráficamente cada inecuación (como en el caso anterior), en un mismo gráfico y considerar, finalmente, la parte común a todas las ellas.

Ejemplo 2

Vamos a resolver el sistema $\begin{cases} x + 2y \leq 3 \\ x \geq 0\ ;\ y \geq 0 \end{cases}$

Lo primero que observamos es que las inecuaciones $x \geq 0$ e $y \geq 0$ restringen la solución de la inecuación $x + 2y \leq 3$ al primer cuadrante obteniendo la siguiente región del plano como solución del sistema.



Ejemplo 3

Un grupo inversor dispone de un máximo de 9 millones de euros para invertir en dos tipos de fondos de inversión, A y B. El fondo de inversión del tipo A tiene una rentabilidad del 4% anual y una limitación legal de 5 millones de euros de inversión máxima. El fondo de inversión del tipo B tiene una rentabilidad del 3% anual, deben invertirse al menos 2 millones de euros y no hay límite superior de inversión. El grupo inversor desea invertir en el fondo del tipo B, como máximo, el doble de lo invertido en el fondo del tipo A. ¿Qué cantidad debe invertir el grupo en cada tipo de fondo para obtener el máximo beneficio anual? Calcúlese dicho beneficio máximo.

El primer paso para abordar un problema como éste es modelizarlo, es decir, expresarlo en términos matemáticos precisos. Para ello, llamamos x a la cantidad invertida en el fondo A e y a la cantidad invertida en el fondo B, pero en millones de euros para manejar números pequeños. El problema es encontrar los mejores valores posibles para x e y. Ahora observamos que una inversión (x, y) requiere $x + y \leq 9$, no sobrepasar los 9 millones de euros de que se dispone, así como $y \leq 2x$, la inversión en B debe ser a lo sumo el doble de la de A, además de que $x \leq 5$. Hay otra condición implícita en el enunciado que es fundamental explicitar, la inversión no puede ser negativa, luego $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Hay infinitas posibilidades posibles (x, y) que satisfacen todos estos requisitos. El problema es encontrar la mejor, es decir, la que hace que el beneficio total $0{,}03x + 0{,}04y$ sea máximo. La formulación matemática del problema es la siguiente:

Incógnitas: $x \equiv inversión\ en\ fondo\ \ A;\ y \equiv inversión\ en\ fondo\ B\ \ (millones)$

$$Función\ Objetivo:\ maximizar\ z = f(x, y) = 0{,}03x + 0{,}04y$$

$$Restricciones:\ \ s.a \equiv \begin{cases} x + y \leq 9 \\ 0 \leq x \leq 5 \\ y \leq 2x \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Un problema de **programación lineal** de dos variables, consiste en encontrar el óptimo (máximo o mínimo) de una función lineal $f(x, y) = ax + by$, llamada **función objetivo**, en un conjunto que puede expresarse como la intersección de un número finito de desigualdades (restricciones).

Los puntos del plano que cumplen el sistema de desigualdades forman un recinto convexo acotado (poligonal) o no acotado, llamado **región factible** del problema. Todos los puntos de dicha región cumplen el sistema de desigualdades. Se trata de buscar, entre todos esos puntos, aquel o aquellos que hagan el valor de la función máximo o mínimo, según sea el problema. Los puntos de la región factible se denominan **soluciones factibles**. El conjunto de los vértices del recinto se denomina conjunto de soluciones factibles básicas y el vértice donde se presenta la solución óptima (máxima o mínima) se llama **solución óptima**. Esta situación de que el óptimo descanse en la intersección de restricciones, y no en el interior de la región convexa donde las restricciones de desigualdad pueden ser satisfechas, sirve como la base de los algoritmos de programación lineal.

En general, un problema de programación lineal puede tener una, más de una, infinitas o ninguna solución. Si hay una única solución óptima, ésta se encuentra en un vértice de la región factible, y si hay más de una o infinitas soluciones óptimas, se encontrarán en un lado de la región factible. Es posible que no haya solución óptima pues cuando el recinto es no acotado, la función objetivo puede crecer o decrecer indefinidamente.

4. Procedimiento a seguir para resolver un problema de programación lineal de dos variables

1] Elegir las incógnitas.

2] Escribir la función objetivo en función de los datos del problema.

3] Escribir las restricciones en forma de sistema de inecuaciones.

4] Averiguar el conjunto de soluciones factibles (conjunto de valores de las variables de decisión que satisfacen todas las restricciones en forma simultánea) representando gráficamente las restricciones. Las restricciones de no negatividad estarían confinando el conjunto de soluciones factibles al primer cuadrante. Esa región factible que verifica todas las restricciones es convexa. Se debe representar gráficamente cada restricción sustituyendo en primer término las desigualdades por igualdades, con lo cual se produce la ecuación de una recta. Después se traza la línea de la recta en el plano y se considera la región en la cual se encuentra cada restricción cuando se considera la desigualdad.

5]

5.1] **Método analítico**: Calcular las coordenadas de los vértices de la región de soluciones factibles y evaluar la función objetivo en cada uno de ellos para ver en cuál presenta el valor óptimo (hay que tener en cuenta aquí la posible no existencia de solución si el recinto no es acotado).

5.2] **Método gráfico**: Representar la función objetivo $f(x,y) = ax + by = 0$, que es una recta que pasa por el origen de coordenadas, y después trazar rectas paralelas a ésta (rectas de nivel) que pasen por cada uno de los vértices de la región factible.

$$b > 0 \implies \begin{cases} el\ máximo\ está\ en\ el\ vértice\ cuya\ recta\ tenga\ mayor\ ordenada \\ el\ mínimo\ está\ en\ el\ vértice\ cuya\ recta\ tenga\ menor\ ordenada \end{cases}$$

$$b < 0 \implies \begin{cases} el\ máximo\ está\ en\ el\ vértice\ cuya\ recta\ tenga\ menor\ ordenada \\ el\ mínimo\ está\ en\ el\ vértice\ cuya\ recta\ tenga\ mayor\ ordenada \end{cases}$$

El método gráfico para resolver los problemas de programación lineal es bastante engorroso cuando aumenta el número de restricciones.

6] Determinado el vértice $P(x,y)$ que optimiza la función objetivo dar como solución óptima las coordenadas de dicho vértice y como valor óptimo de la función objetivo $f(P)$.

Si dos soluciones factibles son óptimas, también lo son todas las soluciones del segmento comprendido entre ambas.

Ejemplo 4

Vamos a resolver un problema de programación lineal en el que tanto las restricciones como la función objetivo vienen dadas:

Sea R la región del plano delimitada por el sistema de inecuaciones

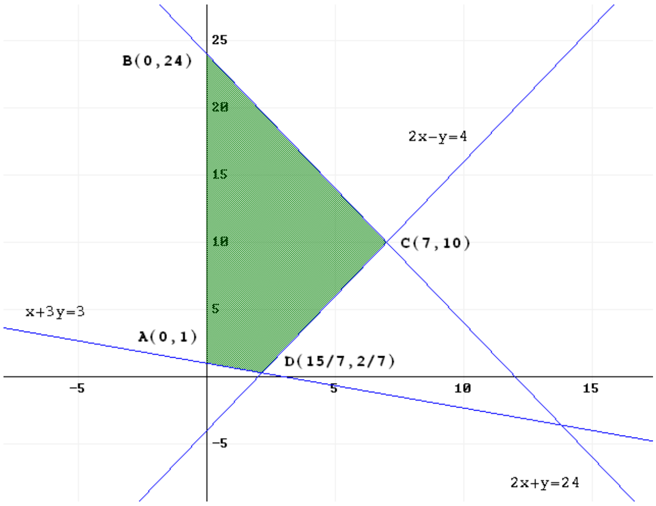
$$R \equiv \begin{cases} x + 3y \geq 3 \\ 2x - y \leq 4 \\ 2x + y \leq 24 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

a) Represéntese la región R y calcúlense las coordenadas de sus vértices.

b) Determínese el punto de R donde la función $f(x,y) = 3x + y$ alcanza su valor máximo y mínimo. Calcúlense dichos valores.

Resolución

a) La región R del plano es:



Las coordenadas de los vértices de la región R vienen dados por las intersecciones de las rectas que intervienen y son:

$\begin{cases} x + 3y = 3 \\ x = 0 \end{cases}$ $A(0,1)$; $\begin{cases} 2x + y = 24 \\ x = 0 \end{cases}$ $B(0,24)$

$\begin{cases} 2x + y = 24 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ $C(7,10)$; $\begin{cases} x + 3y = 3 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ $D\left(\frac{15}{7}, \frac{2}{7}\right)$

b)

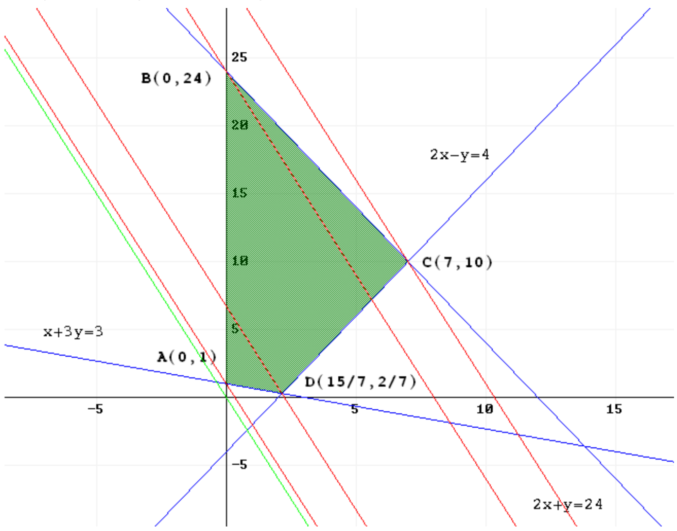
Método analítico: Evaluando la función objetivo en cada uno de los vértices, tenemos:

$f_A = f(0,1) = 1;\ f_B = f(0,24) = 24;\ f_C = f(7,10) = 31;\ f_D = f\left(\frac{15}{7}, \frac{2}{7}\right) = \frac{47}{7} = 6.714285714$

El valor máximo de $f(x,y) = 3x + y$ se alcanza en el punto $C(7,10)$ y su valor es $f(C) = 31$.

El valor mínimo de $f(x,y) = 3x + y$ se alcanza en el punto $A(0,1)$ y su valor es $f(A) = 1$.

Método gráfico: trazamos las rectas de nivel (en rojo) desde los vértices, paralelas a la dirección de la función objetivo (en verde):



La que alcanza más altura en el corte con el eje de ordenadas OY es la trazada desde el vértice $C(7,10)$ y, por tanto, el valor máximo de $f(x,y) = 3x + y$ se alcanza en el punto $C(7,10)$ con valor $f(7,10) = 31$.
La que alcanza menos altura en el corte con el eje de ordenadas OY es la trazada desde el vértice $A(0,1)$ y, por tanto, el valor mínimo de $f(x,y) = 3x + y$ se alcanza en el punto $A(0,1)$ con valor es $f(0,1) = 1$.
Hay que recordar que, en el caso de que el coeficiente b de la función objetivo sea negativo se invierte lo dicho para el máximo y mínimo en el método gráfico.

Ejemplo 5

Vamos a resolver el problema del ejemplo 1

Incógnitas: $x \equiv inversión\ en\ fondo\ A;\ \ y \equiv inversión\ en\ fondo\ B\ \ (en\ millones)$

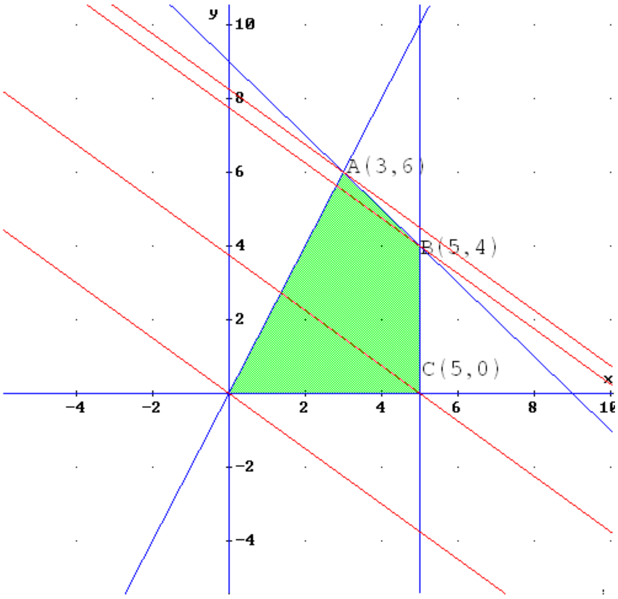
$$\text{Función Objetivo}:\ maximizar\ z = f(x,y) = 0{,}03x + 0{,}04y$$

$$\text{Restricciones}:\ \ s.a \equiv \begin{cases} x + y \leq 9 \\ 0 \leq x \leq 5 \\ \ \ y \leq 2x \\ \ \ y \geq 0 \end{cases}$$

Resolución

Averiguamos el conjunto de soluciones factibles representando gráficamente las restricciones:

Método gráfico



Las rectas de nivel nos indican que el máximo de la función objetivo se alcanza en el vértice A que es único que tenemos que calcular: $\begin{cases} x + y = 9 \\ \ \ y = 2x \end{cases}$ $A(3,6)$ con lo que se deben invertir 3 millones de euros en el fondo A y 6 millones de euros en el fondo B, con un beneficio máximo de 330.000 euros.
(Observemos que $f(3,6) = 0{,}03 \cdot 3 + 0{,}04 \cdot 6 = 0{,}33$)

Método analítico

Calculamos las coordenadas de todos los vértices de la región factible:

$\begin{cases} x + y = 9 \\ \ \ y = 2x \end{cases}$ $A(3,6)$; $\begin{cases} x + y = 9 \\ \ \ x = 5 \end{cases}$ $B(5,4)$

$\begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases}$ $C(5,0)$; $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $O = (0,0)$

Evaluamos la función objetivo $f(x,y) = 0{,}03x + 0{,}04y$ en ellos:

$$f(A) = 0{,}33\ ;\ f(B) = 0{,}31\ ;\ f(C) = 0{,}15$$

El beneficio máximo, 0,33 millones de euros, se alcanza en el vértice $A(3,6)$.
Se deben invertir 3 millones de euros en el fondo A y 6 millones de euros en el fondo B, con un beneficio máximo de 330.000 euros.

5. Análisis de casos especiales

5.1 Infinitas o más de una solución

Si la función objetivo es paralela a una de las restricciones, indicando esto que la función y esa restricción no son linealmente independientes, tienen los coeficientes proporcionales, existen infinitas soluciones óptimas. La función objetivo tomará el mismo valor óptimo en más de un punto solución. Cualquier punto en el segmento de la recta será solución del problema.

Ejemplo 6

Un centro dedicado a la enseñanza personalizada de idiomas tiene dos cursos, uno básico y otro avanzado, para los que dedica distintos recursos. Esta planificación hace que pueda atender entre 40 y 66 estudiantes en el curso básico y entre 20 y 40 estudiantes en el curso avanzado. El número máximo de estudiantes que, en total, el centro puede atender es 96. Por razones de espacio, el número de alumnos del curso básico debe ser, al menos, el doble de los del curso avanzado. Los beneficios mensuales que obtiene el centro por cada estudiante en el curso básico se estiman en 145 euros y en 150 euros por cada estudiante del curso avanzado.
a) Determina el número de estudiantes de cada curso que proporciona el máximo beneficio mensual al centro así como dicho beneficio.
b) Si los beneficios mensuales por alumno fuesen de 150 euros en los dos cursos, ¿cómo varía la solución del apartado anterior?

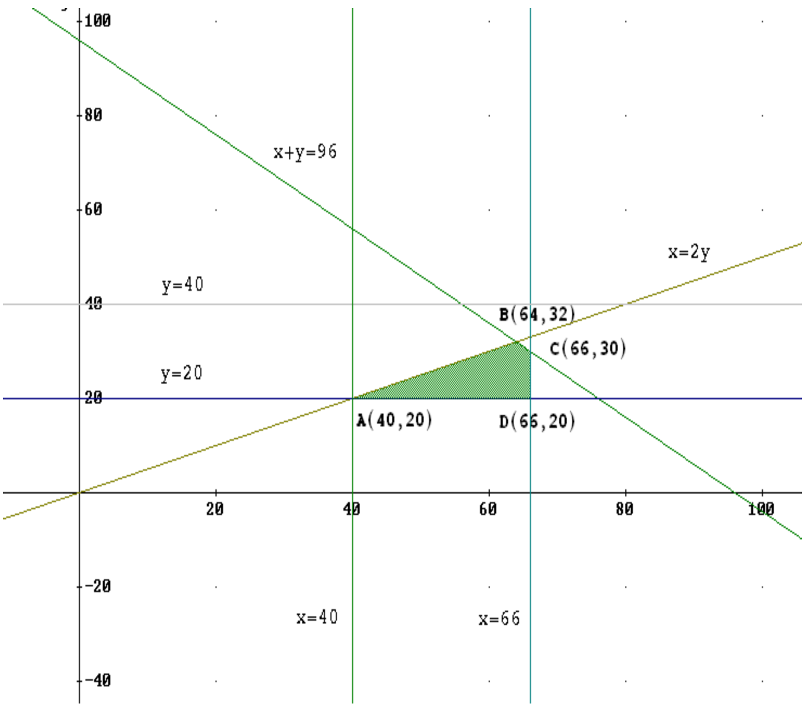
Resolución

$x \equiv número\ de\ alumnos\ del\ curso\ básico.$
$y \equiv número\ de\ alumnos\ del\ curso\ avanzado.$

$$Función\ Objetivo:\ maximizar\ z = f(x,y) = 145x + 150y$$

$$Restricciones:\quad s.a \equiv \begin{cases} x + y \leq 96 \\ x \geq 2y \\ 40 \leq x \leq 66 \\ 20 \leq y \leq 40 \end{cases}$$

a)



Evaluamos la función objetivo $f(x,y) = 145x + 150y$ en los vértices de la región factible:

$$f(A) = 8800 \ ; \ f(B) = 14080 \ ; \ f(C) = 14070 \ ; \ f(D) = 12570$$

El máximo de la función objetivo se alcanza en el vértice B.

El número de estudiantes del curso básico debe ser $x = 64$ y el del curso avanzado de $y = 32$ obteniendo así un beneficio máximo mensual de 14080 euros.

b) En este caso $f(x,y) = 150x + 150y$

$$f(A) = 9000 \ ; \ f(B) = 14400 \ ; \ f(C) = 14400 \ ; \ f(D) = 12900$$

El máximo, 14400 euros, se alcanza en los vértices B y C así como en **todos los puntos del segmento** que los une (infinitas soluciones). Sin embargo, al tratarse de un problema que solo puede admitir soluciones enteras, éstas serán únicamente:

$$x = 64 \ e \ y = 32 \ ; \ x = 65 \ e \ y = 31 \ ; \ x = 66 \ e \ y = 30$$

El problema tiene exactamente **tres soluciones óptimas**.

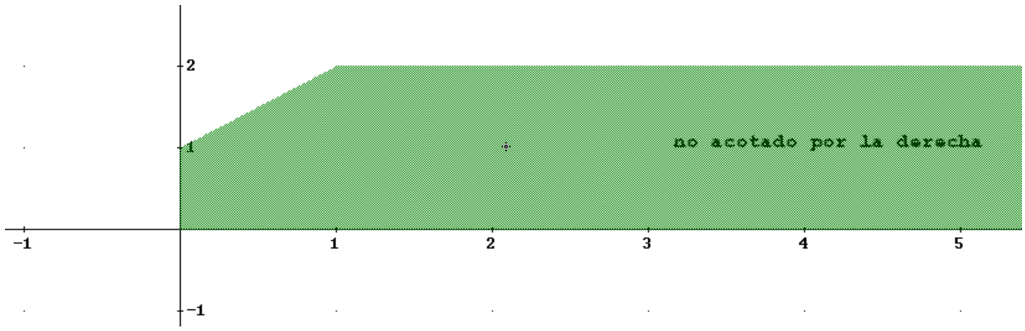
Gráficamente, si representamos la dirección objetivo $150x + 150y = 0$ veríamos que es paralela a la que une los vértices B y C.

5.2 Soluciones no acotadas

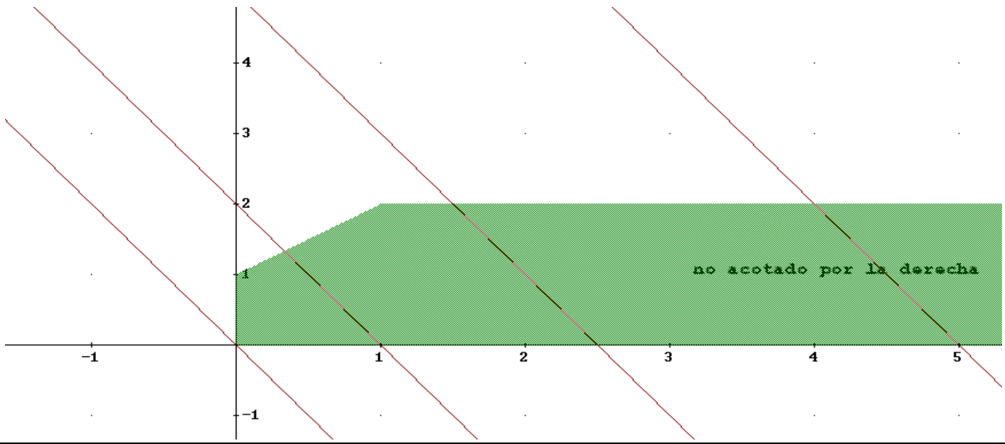
En algunos modelos de programación lineal, los valores de las variables se pueden aumentar en forma indefinida sin violar ninguna de las restricciones, lo que significa que el espacio de soluciones es no acotado al menos en una dirección. Como resultado, el valor de la función objetivo puede crecer en forma indefinida. En este caso decimos que el espacio de soluciones y el valor óptimo de la función objetivo son no acotados.

Ejemplo 7

No podemos encontrar el máximo de la función $f(x,y) = 2x + y$ en la región del plano que mostramos a continuación:



No hay punto o puntos en la región factible en los que las rectas de nivel paralelas a la dirección objetivo $2x + y = 0$, alcancen el valor máximo:



5.3 Soluciones no factibles

Sucede cuando las restricciones no se pueden satisfacer en forma simultánea, es decir no hay soluciones factibles. Esta situación no puede ocurrir si todas las restricciones son del tipo $\leq$. Desde el punto de vista práctico, un espacio infactible apunta a la posibilidad de que el modelo no se haya formulado correctamente, en virtud de que las restricciones están en conflicto.