Tema 3: Sistemas de ecuaciones lineales

1. Introducción

Los sistemas de ecuaciones resuelven problemas relacionados con situaciones de la vida cotidiana que tiene que ver con las Ciencias Sociales. Nos centraremos por tanto en la propia resolución de sistemas, en su tratamiento algebraico, dejando al margen su implicación geométrica.

Ya conocemos de cursos anteriores métodos de resolución de sistemas como el de reducción, igualación o sustitución, además del método de Gauss. En ellos, solo se hace uso realmente de los coeficientes de las incógnitas, es decir, las operaciones entre ecuaciones se trasladan a operaciones entre coeficientes y no entre incógnitas. Por ello, y para facilitar el proceso de resolución, utilizaremos las matrices y los determinantes como soporte de almacenamiento de ellos. A la hora de realizar operaciones entre ecuaciones, trasladaremos éstas a la matriz del sistema.

2. Sistemas de ecuaciones lineales

Un **sistema** de m **ecuaciones lineales** con n incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ es un conjunto de m igualdades de la forma:

$$S \equiv \begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

donde a_{ij} son números reales llamados *coeficientes* y b_i son números reales llamados *términos independientes*, con $1 \le i \le m$ y $1 \le j \le n$.

Cuando el número de incógnitas es pequeño, éstas se designan por letras distintas x, y, z …

Cuando todos los términos independientes son nulos, el sistema se llama *homogéneo*.

2.1 Expresión matricial de un sistema S

Consideramos la matriz A de coeficientes de incógnitas y las matrices columna de términos independientes B e incógnitas X:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \; ; \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

El sistema S se puede expresar, en forma matricial, $A \cdot X = B$

Ejemplo 1

El sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 3 \\ 2x \quad - 3z = 6 \end{cases} \quad \text{tiene matriz coeficientes de las incógnitas } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

2.2 Soluciones de un sistema. Clasificación.

Solución de un sistema S es toda $n-upla$ de números reales $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ que satisfaga el sistema, es decir, que al sustituir cada incógnita x_j por el valor s_j se cumplen todas las ecuaciones, con $1 \le j \le n$.

Ejemplo 2

Los valores $x = 1$ e $y = 2$ son solución del sistema $\begin{cases} x - 2y = -3 \\ x + y = 3 \end{cases}$ porque $\begin{cases} 1 - 2 \cdot 2 = -3 \\ 1 + 2 = 3 \end{cases}$ es decir, satisfacen ambas ecuaciones.

Un sistema puede tener más de una solución. Resolver un sistema es encontrar todas sus soluciones.
Diremos que un sistema S es **compatible** si tiene solución. Si la solución es única diremos que es **compatible determinado**; en caso contrario diremos que es **compatible indeterminado**.
Si un sistema S no tiene solución diremos que es **incompatible**.
La clasificación de un sistema S, atendiendo a sus soluciones, queda:

$$S\ es \begin{cases} No\ Homogéneo \begin{cases} Compatible \left\langle \begin{array}{l} Determinado\ (Solución\ única) \\ Indeterminado\ (Infinitas\ soluciones) \end{array} \right. \\ Incompatible\ \ (No\ tiene\ solución) \end{cases} \\ Homogéneo \longrightarrow Compatible \left\langle \begin{array}{l} Determinado (Solución\ trivial\ (0,0,\dots 0)) \\ Indeterminado\ (infinitas\ soluciones) \end{array} \right. \end{cases}$$

2.3 Transformaciones de un sistema S en otro equivalente S'

Dos **sistemas** S y S' son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

1] Si en un sistema S se multiplica una de sus ecuaciones por un número real $k \neq 0$ se obtiene un sistema S' equivalente a S.

2] Si en un sistema S se sustituye una ecuación cualquiera, e_i, por una combinación lineal del tipo $e_i + \lambda_1 \cdot e_1 + \cdots \lambda_{i-1} \cdot e_{i-1} + \lambda_{i+1} \cdot e_{i+1} + \cdots + \lambda_m \cdot e_m$ se obtiene un sistema S' equivalente a S.
3] Si en un sistema S una ecuación cualquiera es combinación lineal de las demás, puede suprimirse resultando un sistema S' equivalente a S.
Estas operaciones, a las que añadimos el intercambio de ecuaciones entre sí, se corresponden con las transformaciones del método de Gauss que conocemos del curso pasado.

3. Sistemas de Cramer

Un **sistema** S es **de Cramer** si y solo si cumple las dos condiciones siguientes:
C1] Tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.
C2] La matriz de coeficientes de las incógnitas es regular.
Los sistemas Cramer se pueden resolver mediante la regla de Cramer:

$$\text{Sea } S \equiv \begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \cdots + a_{nn} \cdot x_n = b_n \end{cases} \text{ con } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matriz regular, esto es $|A| \neq 0$, un sistema Cramer.

El sistema en forma matricial es $A \cdot X = B$ de donde $X = A^{-1} \cdot B$ y efectuando las operaciones obtenemos:

$$X = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} b_1 \cdot A_{11} + b_2 \cdot A_{21} + \cdots b_n \cdot A_{n1} \\ b_1 \cdot A_{12} + b_2 \cdot A_{22} + \cdots b_n \cdot A_{n2} \\ \dots \\ b_1 \cdot A_{1n} + b_2 \cdot A_{2n} + \cdots b_n \cdot A_{nn} \end{pmatrix}$$

esto es

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{b_1 \cdot A_{11} + b_2 \cdot A_{21} + \cdots b_n \cdot A_{n1}}{|A|} \\ \dfrac{b_1 \cdot A_{12} + b_2 \cdot A_{22} + \cdots b_n \cdot A_{n2}}{|A|} \\ \dots \\ \dfrac{b_1 \cdot A_{1n} + b_2 \cdot A_{2n} + \cdots b_n \cdot A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix}$$

de donde resulta

$$x_1 = \frac{b_1 \cdot A_{11} + b_2 \cdot A_{21} + \cdots b_n \cdot A_{n1}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_2 = \frac{b_1 \cdot A_{12} + b_2 \cdot A_{22} + \cdots b_n \cdot A_{n2}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

…………………………………………………………………………………

$$x_n = \frac{b_1 \cdot A_{1n} + b_2 \cdot A_{2n} + \cdots b_n \cdot A_{nn}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & b_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

fórmulas conocidas como **regla de Cramer**:

"Un sistema con n ecuaciones lineales y n incógnitas, cuyo determinante de la matriz A de coeficientes de las incógnitas sea distinto de cero, admite una única solución, donde el valor de cada incógnita se obtiene dividiendo por el determinante de A el determinante de la matriz que resulta de sustituir en A la columna que corresponde a los coeficientes de la incógnita por la que forman los términos independientes".

Ejemplo 3

Comprobemos que el sistema $\begin{cases} x \quad + y \quad + z = 3 \\ x + 3y \quad + z = 3 \\ 3x \qquad - 3z = 6 \end{cases}$ es de Cramer

Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $|A| = -12 \neq 0$

El sistema tiene igual número de ecuaciones que de incógnitas, tres, y la matriz de coeficientes de las incógnitas es regular; se trata de un sistema Cramer, con una única solución que vamos a calcular con la regla del mismo nombre:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{5}{2}\ ; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \end{vmatrix}}{-12} = 0\ ; \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{-12} = \frac{1}{2}$$

---

4. Teorema de Rouché-Fröbenius

Consideremos un sistema S de m ecuaciones lineales con n incógnitas

$$S \equiv \begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

Sean $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ la matriz de coeficientes de las incógnitas y la matriz ampliada con la columna de términos independientes.

La condición necesaria y suficiente para el sistema S sea compatible es que coincidan los rangos de las matrices A y A^*:

$$S\ es\ compatible\ \Leftrightarrow rg(A) = rg(A^*)$$

Demostración

$\Longrightarrow$) S compatible. Por tanto existe $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \dots \\ s_n \end{pmatrix}$ solución de S y $A \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \dots \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$

En consecuencia, la última columna de A^* es combinación lineal de las de A y, a efectos de rango, puede suprimirse, con lo que $rg(A) = rg(A^*)$.

$\Longleftarrow$) $rg(A) = rg(A^*) = r$. En este caso existe en A un menor de orden r, no nulo, que vamos suponer, sin pérdida de generalidad, que es el formado por las r primeras ecuaciones y r primeras incógnitas.

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$ Por tanto existen r ecuaciones linealmente independientes y las $m - r$ restantes son combinación lineal de las ellas. Por equivalencia de sistemas, esas $m - r$ ecuaciones pueden suprimirse resultando el sistema equivalente a S:

$$S' \equiv \begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1r} \cdot x_n = b_1 - a_{1r+1} \cdot x_{r+1} - \cdots - a_{1n} \cdot x_n \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2r} \cdot x_n = b_2 - a_{2r+1} \cdot x_{r+1} - \cdots - a_{2n} \cdot x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{r1} \cdot x_1 + a_{r2} \cdot x_2 + \cdots + a_{rr} \cdot x_r = b_r - a_{rr+1} \cdot x_{r+1} - \cdots - a_{rn} \cdot x_n \end{cases}$$

Este sistema tiene r ecuaciones y, en sus primeros miembros, r incógnitas que llamaremos *principales*. Las $n - r$ incógnitas localizadas en los segundos miembros son las *no principales* (parámetros). Se ha obtenido un sistema S' de Cramer, rxr y, por tanto, compatible, que es equivalente al de sistema S inicial. Por tanto S' es compatible.

4.1 Discusión de la compatibilidad

Al aplicar este teorema pueden darse las siguientes posibilidades:

1] Que el número de incógnitas no principales sea cero, $n - r = 0$ y $n = r$

El sistema tiene solución única y, por tanto, es *compatible determinado*.

2] Que el número de incógnitas no principales no sea cero, $n - r > 0$ y $n > r$

En este caso el sistema es *compatible indeterminado* en el sentido de que tiene un número no finito de soluciones porque para cada conjunto de valores arbitrarios que se den a las incógnitas no principales, se obtiene una solución del sistema al aplicar la regla de Cramer.

Resumiendo:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{rg(A) \neq rg(A^*) \Leftrightarrow S\ incompatible} \\ \boldsymbol{rg(A) = rg(A^*) = n \Leftrightarrow S\ compatible\ determinado} \\ \boldsymbol{rg(A) = rg(A^*) < n \Leftrightarrow S\ compatible\ indeterminado} \end{bmatrix}$$

5. Sistemas homogéneos

Son aquellos sistemas de ecuaciones lineales en los que todos sus términos independientes son nulos. Son siempre compatibles porque tienen la solución trivial $(0, 0, \dots, 0)$.

$$S_h \equiv \begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = 0 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n = 0 \end{cases}$$

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ la matriz de coeficientes de las incógnitas.

En el caso de $rg(A) < n$ el sistema será compatible indeterminado y tendrá soluciones distintas de la trivial. Si $rg(A) = n$ la única solución será la trivial.

6. Sistemas de ecuaciones lineales con parámetros

En los sistemas con parámetros uno o varios coeficientes de incógnitas o términos independientes no son números fijos sino actúan como parámetros que pueden tomar cualquier valor real. Se tratará por tanto de discutir, y resolver en su caso, el sistema en función de los valores que pueden tomar dichos parámetros. Se puede utilizar tanto el método de Gauss como el Teorema de Rouché.

Ejemplo 4

Dado el siguiente sistema dependiente del parámetro k:

$$\begin{cases} kx - 2y + 7z = 8 \\ x \quad - y \ + kz = 2 \\ -x \ + y \ + z = 2 \end{cases}$$

Discútase el sistema según los diferentes valores de k y resuélvase en el caso en que sea compatible

Resolución

Vamos a utilizar el método de Gauss. Transformamos la matriz ampliada del sistema:

$$\begin{pmatrix} k & -2 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & k & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[\text{Intercambio } F_1, F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & k & 2 \\ k & -2 & 7 & 8 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow[\substack{F_2 = F_2 - k.F_1 \\ F_3 = F_3 + F_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & k & 2 \\ 0 & -2+k & 7-k^2 & 8-2k \\ 0 & 0 & 1+k & 4 \end{pmatrix}$$

El sistema escalonado es $\begin{cases} x - y + kz = 2 \\ (-2+k)y + (7-k^2)z = 8 - 2k \\ (1+k)z = 4 \end{cases}$

Caso 1 $\forall k \in \mathbb{R} \ \ k \neq -1 \ y \ k \neq 2$ [-1 y 2 son los valores de k que anulan los coeficientes de z e y]

Sistema Compatible Determinado (solución única)

Resolviendo desde la tercera ecuación hasta la primera obtenemos:

$$z = \frac{4}{k+1}; \qquad \mathrm{y} = \frac{2(\mathrm{k}+5)}{(\mathrm{k}+1)}; \qquad \mathrm{x} = \frac{12}{\mathrm{k}+1}$$

Caso 2 $k = -1$

La tercera ecuación del sistema escalonado queda $0 = 4$. Sistema Incompatible (No tiene solución)

Caso 3 $k = 2$

El sistema escalonado es $\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 3z = 4 \end{cases}$ Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones)

b) Solución: $z = \frac{4}{3}$; $y = t$; $x = \frac{-2}{3} + t \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Ejemplo 5

Dado el siguiente sistema dependiente del parámetro real k:

$$\begin{cases} x \ + y + z = 3 \\ x + ky + z = 3 \\ kx \quad - 3z = 6 \end{cases}$$

a) Discútase el sistema según los diferentes valores de k.

b) Resuélvase el sistema en el caso en que tenga infinitas soluciones.

c) Resuélvase el sistema para $k = 3$.

Resolución
Utilizamos el teorema de Rouché

a) Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ k & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Matriz ampliada con la columna de términos independientes: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & k & 1 & 3 \\ k & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ k & 0 & -3 \end{vmatrix} =_{C_3=C_3-C_1}= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ k & 0 & -3-k \end{vmatrix} = -(k+3)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix}$$
$$= -(k+3)(k-1)$$

$$|A| = 0 \iff \begin{cases} k = -3 \\ k = 1 \end{cases}$$

Caso 1 $\forall k \in \mathbb{R}\ \ k \neq -1\ y\ k \neq -3.\ \ |A| \neq 0$.
Por tanto $rg(A) = 3 = rg(A^*) = n^{\underline{o}}\ incógnitas$

$$Sistema\ Compatible\ Determinado\ (Solución\ única)$$

Caso 2 $k = -3$. En este caso $|A| = 0\ \ y\ \ rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

Calculemos el rango de la matriz A:

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$
$rg(A^*) \geq 2$

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} =_{C_3=C_3+2C_1}= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 5 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3\cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -60 \neq 0$$

Por tanto $rg(A^*) = 3$.

$$2 = rg(A) \neq rg(A^*) = 3:\ Sistema\ Incompatible\ (No\ tiene\ solución)$$

Caso 3 $k = 1$. En este caso $|A| = 0\ \ y\ \ rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y, por tanto, $rg(A) = 2\ y\ \ rg(A^*) \geq 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Como tiene dos filas iguales, eliminamos una de ellas con lo que $rg(A^*) = 2$

$$rg(A) = rg(A^*) = 2 = n^{\underline{o}}\ incógnitas:\ Sistema\ Compatible\ Indeterminado$$

b) Resolvemos para $k=1$.

Observando el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, el sistema equivalente viene dado por las ecuaciones cuyos coeficientes forman parte de dicho menor, esto es $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x \quad -3z=6 \end{cases}$

Las incógnitas principales del sistema son aquellas cuyos coeficientes forman parte de las columnas del menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, es decir x e y. La incógnita z actúa como incógnita no principal o parámetro. Así, tenemos:

$z=t$; $\begin{cases} x+y=3-t \\ x \quad = 6+3t \end{cases}$ $\forall t \in \mathbb{R}$, de donde $y=3-t-(6+3t)=-3-4t$

La solución viene dada por $\begin{cases} x=6+3t \\ y=-3-4t \\ z=t \end{cases}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

c) Resolvemos el sistema para $k=3$: $\begin{cases} x \quad +y \quad +z=3 \\ x+3y \quad +z=3 \\ 3x \quad\quad -3z=6 \end{cases}$

$|A|=-12$ siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Estamos en el caso 1 estudiado; por tanto el sistema es compatible determinado, tiene una única solución. Aplicando la regla de Cramer obtenemos:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{-12}=\frac{5}{2}\ ; \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \end{vmatrix}}{-12}=0\ ; \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{-12}=\frac{1}{2}$$