Tema 2: Determinantes

1. Introducción

En este tema vamos a asignar a cada matriz cuadrada de orden n, $A \in \mathcal{M}_n$ un número real que llamaremos su **determinante** y escribiremos $|A|$. Vamos a ver cómo se calcula.

Consideremos n elementos que pueden ser los n primeros números naturales $1, 2, 3, \dots, n$ y sus $n!$ permutaciones. Llamamos permutación principal a aquella en la que los elementos están en el orden natural $(1, 2, 3, \dots, n)$.

Diremos que dos elementos de una permutación presentan *inversión* si están en orden distinto al que tienen en la permutación principal; en caso contrario diremos que presentan *permanencia*. Por ejemplo, para $n = 3$, en la permutación (2, 1, 3) los elementos 1 y 2 presentan inversión puesto que están en distinto orden al que tienen en la principal (1, 2, 3).

Diremos que una permutación es de *clase par* cuando es par el número total de sus inversiones, y de *clase impar* cuando es impar este número. Para calcular el número total de inversiones de una permutación basta comparar cada elemento de la permutación con sus siguientes. Así, la permutación (2, 1, 3) tiene 1 inversión puesto que solamente los elementos 1 y 2 presentan inversión.

Se puede demostrar que hay tantas permutaciones de clase par como impar.

Para $n = 2$, de las $2! = 2$ permutaciones $\{(1,2), (2,1)\}, (1,2)$ es de clase par pues no tiene inversiones y $(2,1)$ de clase impar pues presenta una inversión.

Para $n = 3$, de las $3! = 6$ permutaciones

$\{ (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1) \}$

$(1, 2, 3), (2, 3, 1)\ y\ (3, 1, 2)$ son de clase par (0, 2 y 2 inversiones respectivamente)y $(1, 3, 2), (2, 1, 3)\ y\ (3, 2, 1)$ de clase impar (1, 1 y 3 inversiones respectivamente).

2. Determinante de una matriz cuadrada

Dada una matriz cuadrada de orden n, $A \in \mathcal{M}_n$, se pueden formar productos de n elementos entre los n^2 de la matriz, eligiéndolos de forma que no haya dos de la misma fila ni dos de la misma columna. Necesariamente habrá uno de cada fila y uno de cada columna. Si consideramos ordenados por filas cada uno de estos productos será de la forma

$$a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_n j_n$$

donde $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ es una permutación de los números $(1, 2, \dots, n)$ y, en total, habrá $n!$ productos (tantos como permutaciones de n elementos).

Determinante de una matriz cuadrada de orden n, $A \in \mathcal{M}_n$, es el número que resulta al sumar los $n!$ productos posibles, de n factores cada uno, tales que no haya dos de la misma fila ni dos de la misma columna, precedidos del signo $+$ o del signo $-$, según sean de la misma o distinta clase las permutaciones de los índices que indican filas y columnas.

Formalmente:

$$\mathcal{M}_n \quad \overset{Determinante}{\rightrightarrows} \quad \mathbb{R}$$

$$A \longrightarrow |A| = \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n) \in \mathrm{P_n}} (-1)^{\alpha} \cdot a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_n j_n$$

donde $\alpha = 1$ si $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ es impar y $\alpha = 2$ si $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ es par y $\mathrm{P_n}$ es el conjunto de permutaciones de $(1, 2, \dots, n)$.

2.1 Determinantes de orden 2

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matriz cuadrada de orden 2. Aplicando la definición, el determinante de la matriz es: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ es decir, el producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de los de la diagonal secundaria.

Ejemplo 1

Sea la matriz de orden 2 $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. Su determinante vale $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 4$

2.2 Determinantes de orden 3 (Regla de Sarrus)

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ una matriz cuadrada de orden 3.

Teniendo en cuenta la definición de determinante, calculamos las permutaciones de los números $(1, 2, 3)$ y su clase:

$(1,2,3) \overset{par}{\Rrightarrow} \alpha = 2 \Rightarrow a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$	$(1,3,2) \overset{impar}{\Rrightarrow} \alpha = 1 \Rightarrow -a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$
$(2,3,1) \overset{par}{\Rrightarrow} \alpha = 2 \Rightarrow a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$	$(2,1,3) \overset{impar}{\Rrightarrow} \alpha = 1 \Rightarrow -a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$
$(3,1,2) \overset{par}{\Rrightarrow} \alpha = 2 \Rightarrow a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$	$(3,2,1) \overset{impar}{\Rrightarrow} \alpha = 1 \Rightarrow -a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$

Así: el determinante de la matriz A de orden 3 es:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$
$$-a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

el determinante de la matriz es: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Regla de Sarrus

Si observamos, los sumandos $+$ en el desarrollo del determinante de orden 3 son el producto de los términos de la diagonal principal y el producto de los términos de cada paralela a ella por el elemento opuesto. Lo mismo ocurre para los sumandos $-$ con relación a la diagonal secundaria:

$$\begin{vmatrix} \blacksquare & \cdot & \cdot \\ \cdot & \blacksquare & \cdot \\ \cdot & \cdot & \blacksquare \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \blacksquare & \cdot \\ \cdot & \cdot & \blacksquare \\ \blacksquare & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \blacksquare \\ \blacksquare & \cdot & \cdot \\ \cdot & \blacksquare & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \blacksquare \\ \cdot & \blacksquare & \cdot \\ \blacksquare & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \blacksquare & \cdot \\ \blacksquare & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \blacksquare \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \blacksquare & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \blacksquare \\ \cdot & \blacksquare & \cdot \end{vmatrix}$$

También podemos usar la siguiente regla nemotécnica, que no es el determinante, pero que ayuda a su cálculo:

Copiamos a continuación de la matriz A sus dos primeras columnas, quedándonos la disposición $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$ Ahora, los sumando con signo $+$ son los productos de los elementos de las tres diagonales principales y los de signo $-$ los productos de los elementos de las tres diagonales secundarias.

Ejemplo 2

Calcula el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 2\cdot 2 + 3\cdot(-3)\cdot 4 + 1 - 2\cdot 4 - 3\cdot 2 - (-3)\cdot(-1) = -56$$

El método de cálculo es muy pesado para determinantes de orden superior a 3; por ello vamos a ver propiedades que permiten ese cálculo de forma más sencilla.

2.3 Propiedades de los determinantes

[1] El determinante de una matriz cuadrada coincide con el de su traspuesta.

[2] Si en un determinante se intercambian entre sí dos filas (columnas), el nuevo determinante cambia de signo respecto al inicial.

[3] Si un determinante tiene dos filas (columnas) iguales, su valor es cero. (Es consecuencia de la propiedad anterior)

[4] Si todos los elementos de una fila (columna) de un determinante son nulos entonces su valor es cero.

[5] Si se multiplican por un número los elementos de una fila (columna) el valor del determinante queda multiplicado por dicho número:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k\cdot a_{21} & k\cdot a_{22} & k\cdot a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

[6] Si dos filas (columnas) de un determinante son proporcionales, entonces su valor es cero. (Es evidente aplicando las propiedades [5] y [3])

[7] Si todos los elementos de una fila (columna) de un determinante están formados por la suma de dos sumandos, dicho determinante se descompone en suma de dos determinantes que tienen los mismos elementos que el determinante dado excepto los correspondientes a aquella fila (columna) que en el primer determinante está formada por los primeros sumandos y en el segundo por los segundos sumandos.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a'_{21} & a_{22}+a'_{22} & a_{23}+a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

[8] Si a los elementos de una fila (columna) se les suma los elementos de otra fila (columna) multiplicados por un número real $k \neq 0$, el determinante no varía. (Es consecuencia de las propiedades [7], [5] y [3])

Así, por ejemplo:

$$56 = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{F_2+F_1}{\triangleq} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 56$$

donde a la segunda fila se le ha sumado la primera fila.

[9] Si una fila (columna) de un determinante es combinación lineal de otras, es determinante vale cero.

Así por ejemplo $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 7 & -5 \end{vmatrix} = 0$ si observamos que $F_3 = F_1 + 2\cdot F_2$ (la fila tercera es combinación lineal de las otras dos)

[10] El determinante del producto de dos matrices cuadradas del mismo orden es igual al producto de sus determinantes.

3. Menor complementario y adjunto de un elemento de una matriz cuadrada

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$ matriz cuadrada de orden n.

- Se llama **menor complementario** del elemento a_{ij} al determinante de orden $n-1$ que resulta de suprimir en el determinante de A, |A|, la fila $i-ésima$ y la columna $j-ésima$. Lo representaremos por α_{ij}.

Ejemplo 3

En la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, el menor complementario del elemento $a_{21} = 1$ es $\alpha_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$ y el del elemento $a_{31} = 4$ es $\alpha_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -11$

- Se llama **adjunto** del elemento a_{ij} al menor complementario del dicho elemento anteponiendo el signo + o el signo – según que la suma de los subíndices $i+j$ sea par o impar. Se representa por A_{ij} y su valor es

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij}$$

Ejemplo 4

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

El adjunto del elemento $a_{21} = 1$ es $A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \alpha_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5$

El adjunto del elemento $a_{31} = 4$ es $A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \alpha_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -11$

Observemos que $\begin{cases} i+j\ par \Longrightarrow A_{ij} = \alpha_{ij} \\ i+j\ impar \Longrightarrow A_{ij} = -\alpha_{ij} \end{cases}$

---

4. Desarrollo de un determinante por los adjuntos de los elementos de una de sus líneas (fila o columna)

El determinante de una matriz cuadrada A de orden n es igual a la suma de los productos de los elemento de una fila (columna) por sus adjuntos correspondientes, esto es:

$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$ matriz cuadrada de orden n, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} \dots & a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ en la que hemos significado, además de las dos primeras filas y columnas y la última fila y columna, la fila $p-ésima$.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} \dots & a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{p1} \cdot A_{p1} + a_{p2} \cdot A_{p2} + \cdots + a_{pn} \cdot A_{pn}$$

Obviamos la demostración de este teorema.

Ejemplo 5

Calculamos el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ desarrollándolo por la primera fila:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -A_{11} + 3 \cdot A_{12} + A_{13} = -7 + 3 \cdot (-14) - 7 = -56$$

donde los adjuntos que aparecen son:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \ ; \ A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -14 \ ; \ A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -7$$

Los signos de los adjuntos respecto a los menores complementarios van siendo $+$, $-$ alternativamente, empezando por la esquina superior izquierda y desplazándonos en horizontal y/o vertical.

4.1 Consecuencias

[1] El resultado se sumar los productos de los elementos de una fila (columna) por los adjuntos de otra fila (columna) es cero.
[2] El determinante de una matriz diagonal o triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal.

La propiedad [8] de los determinantes resulta muy útil para transformar un determinante de manera que aparezcan el mayor número de ceros en una de sus líneas para, posteriormente, desarrollarlo por los adjuntos de sus elementos.

Ejemplo 6

Calcula el determinante $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Utilizando la propiedad mencionada vamos a sumar a la fila segunda la primera y a la tercera 4 veces la primera con lo que obtenemos ceros en dos elementos de la primera columna; después desarrollamos el determinante por la primera columna:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{F_2+F_1 \\ F_3+4\cdot F_1}}{\triangleq} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 13 & 6 \end{vmatrix} = -1 \cdot A_{11} = -A_{11} = -\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 13 & 6 \end{vmatrix} = -56$$

Como vemos el método es interesante para calcular determinantes de orden superior a 3 puesto que siempre es posible reducir el orden del determinante mediante el desarrollo por los adjuntos de los elementos de una línea.

---

5. Matrices asociadas a una matriz cuadrada. Inversa de una matriz cuadrada

Matriz **regular** es toda matriz cuadrada A tal que $|A| \neq 0$.
Matriz **singular** es toda matriz cuadrada A tal que $|A| = 0$.
Matriz **adjunta** de una matriz cuadrada A es la matriz que representaremos por $Adj(A)$ o A^d cuyos elementos son los adjuntos de los elementos a_{ij} de la matriz A.

$$Adj(A) = A^d = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriz **inversa** de una matriz regular A es una matriz cuadrada, que representaremos por A^{-1} que verifica $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$

5.1 Teorema de existencia y unicidad de la matriz inversa

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Entonces:
a) Si existe, A^{-1} es única
b) Existe A^{-1} si y solo si A es regular ($|A| \neq 0$)

5.2 Cálculo de la matriz inversa

Sea A una matriz regular. Su inversa es la matriz traspuesta de la adjunta de A multiplicada por el inverso del valor de su determinante.

$$A \overset{Adjunta}{\rightrightarrows} Adj(A) \overset{Traspuesta}{\rightrightarrows} \left(Adj(A)\right)^t \overset{Divsión\ por\ |A|}{\rightrightarrows} \frac{1}{|A|}\cdot\left(Adj(A)\right)^t = A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot\left(Adj(A)\right)^t$$

Ejemplo 7

Sea $P = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ -4 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; Calculemos su inversa P^{-1}

$|P| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -3 \\ -4 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$; Tiene inversa

$P_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4$; $P_{12} = -\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4$; $P_{13} = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$P_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3$; $P_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4$; $P_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$P_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -3$; $P_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 2$; $P_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = -3$

Matriz adjunta de P: $Adj(P) = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Matriz traspuesta de la matriz adjunta: $[Adj(P)]^t = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -4 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Matriz inversa de P: $P^{-1} = \frac{1}{|P|}\cdot[Adj(P)]^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -4 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & -3/2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$

Propiedades

A, B matrices regulares:

P1] La matriz inversa, si existe, es única.

P2] $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$

P3] $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

6. Rango de una matriz

Sea $A \in \mathcal{M}_{mxn}$ matriz rectangular de dimensión mxn.

- Se llama **menor de orden *h*** al determinante de una matriz cuadrada cualquiera de orden h que resulte de suprimir $m-h$ filas y $n-h$ columnas de la matriz A.

- Dado un menor de orden h, se llama **menor orlado** al determinante de orden $h+1$ que se obtiene añadiendo al anterior elementos de una nueva fila y una nueva columna de la matriz A.

Ejemplo 8

Consideramos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

Son algunos menores de orden 2:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ que resulta de suprimir en A la fila 3 y las columnas 3 y 4.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ que resulta de suprimir en A la fila 2 y columnas 3 y 4.

Los menores de orden 3 (todos nulos) son:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix} \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 6 \end{vmatrix}$$

- El **rango** de la matriz A es r si existe un menor en A, de orden r, distinto de cero tal que todos los menores de orden $r+1$ son nulos. Es, por tanto, el orden del mayor menor no nulo de la matriz. El menor no nulo se llama *menor principal*.

6.1 Método práctico para calcular el rango de una matriz

1] Si hay filas o columnas que son combinación lineal de sus paralelas o que son nulas, se suprimen.

2] Se elige un elemento de la matriz que no sea cero, con lo que el rango es, al menos, 1. A continuación, orlamos el menor no nulo de orden 1 (formado por dicho elemento) para formar uno de orden superior en una unidad. Si alguno de los menores así formados es no nulo, el rango de la matriz es, al menos 2. Repetimos el proceso hasta encontrar un menor no nulo de orden r que al orlarlo con las demás filas y columnas, para formar menores de orden $r+1$, resulten todos ellos determinantes nulos.

Ejemplo 9

Calculamos el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & 4 & 2 & 25 \end{pmatrix}$

Hay elementos no nulos en A, por ejemplo $a_{11} = 1$; el rango de A es, al menos 1.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) \geq 2$.

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ con la tercera fila y tercera columna de A :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \overset{F_2+F_1}{\cong} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ con la tercera fila y cuarta columna de A :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 25 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\substack{F_2+F_1 \\ F_3-2F_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 13 \\ 0 & 2 & 13 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \text{Por tanto } rg(A) = 2$$
