Tema 1: Matrices

El concepto de matriz alcanza múltiples aplicaciones tanto en la representación y manipulación de datos como en el cálculo numérico.

1. Terminología

Comenzamos con la definición de matriz de dimensión u orden mxn como un cuadro de números dispuestos en m filas y n columnas y su representación con letras mayúsculas $A=(a_{ij})$ siendo $i=1,\dots,m$ indicativo de fila y $j=1,\dots n$ indicativo de columna:

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2}\dots & a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2}\dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ es una matriz en la que hemos significado las dos primeras filas y columnas, la fila $p-ésima$ y la última fila y columna.

Así, en la matriz de dimensión $2x3$ $A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ identificamos alguno de sus elementos según su posición: $a_{12}=-1$ o $a_{23}=5$.

Llamamos $\mathcal{M}_{mxn}$ al conjunto de matrices de orden mxn; esto nos permitirá ser rigurosos a la hora de enunciar ciertos resultados o propiedades.

2. Igualdad de matrices

Dos matrices de la misma dimensión son iguales si y solo si lo son los elementos que ocupan la misma posición en cada una de ellas, esto es:

Sean $A,B\in\mathcal{M}_{mxn}$ $A=(a_{ij})=B=(b_{ij})\Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}\quad \forall i=1,\dots,m\ \forall j=1,\dots,n$

3. Tipos de matrices

Pasamos ahora a definir los distintos tipos de matrices: matriz fila, matriz columna, matriz nula, matriz cuadrada, matriz rectangular y, dentro de las matrices cuadradas, a definir la diagonal principal y la secundaria.

Matriz fila es toda matriz de dimensión $1xn$ (vector fila):

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Matriz columna es toda matriz de dimensión mx1 (vector columna): $A=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Matriz nula es toda matriz en la que todos sus elementos son nulos: $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matriz cuadrada es toda matriz que tiene igual número de filas y de columnas. Se hablará de matriz cuadrada de orden n (dimensión nxn): $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

Llamaremos $\mathcal{M}_n$ al conjunto de matrices cuadradas de orden n.

En toda matriz cuadrada distinguimos la *diagonal principal*, formada por los elementos a_{ii} y la *diagonal secundaria*, elementos a_{ij} con $i+j=n+1$.

$$A=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & \boldsymbol{a_{22}}\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{pmatrix} \quad ; \quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n-1} & \boldsymbol{a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22}\dots & \boldsymbol{a_{2n-1}} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \\ \boldsymbol{a_{n1}} & a_{n2}\dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A las matrices no cuadradas las llamaremos rectangulares.

Matriz diagonal es toda matriz cuadrada en la que los elementos que no están en la diagonal principal valen cero.

$$A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

Matriz escalar es toda matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son iguales.

$$A=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

Matriz unidad es una matriz escalar en la que los elementos de la diagonal principal valen la unidad.

$$I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\text{ matriz unidad de orden 3}$$

Matriz triangular superior es una matriz cuadrada en la que los elementos por debajo de la diagonal principal son nulos.

$$A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n \text{ es triangular superior } \Leftrightarrow a_{ij}=0\ \forall i>j$$

Matriz triangular inferior es una matriz cuadrada en la que los elementos por encima de la diagonal principal son nulos.

$$A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_n \text{ es triangular inferior } \Leftrightarrow a_{ij}=0\ \forall i<j$$

Vamos a definir las operaciones de suma en el conjunto $\mathcal{M}_{mxn}$ y la de producto de número real α por una matriz de $\mathcal{M}_{mxn}$. Terminaremos con la trasposición de matrices.

4. Operaciones con matrices

4.1 Suma de matrices

Sean $A,B\in\mathcal{M}_{mxn}$, $A=\left(a_{ij}\right)$ y $B=\left(b_{ij}\right)$ definimos su suma $A+B$ como una matriz $C=(c_{ij})\in\mathcal{M}_{mxn}$ en la que $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\ \forall i=1,\dots,m\ \ \forall j=1,\dots,n$, esto es, una nueva matriz de la misma dimensión que las dadas en la que el elemento que ocupa la posición fila i columna j es la suma de los elementos que ocupan esa misma posición en A y B.

Definimos la **opuesta** $-A$ de una matriz $A=(a_{ij})$ como $-A=(-a_{ij})$ y la **resta** de dos matrices de la misma dimensión como $A-B=A+(-B)$.

Ejemplo 1

$$\begin{pmatrix}-1&5\\2&-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&2\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&7\\4&0\end{pmatrix}$$

4.1.1 Propiedades de la suma de matrices

$\forall A,B\in\mathcal{M}_{mxn}$

[P1] Conmutativa: $A+B=B+A$

[P2] Asociativa: $(A+B)+C=A+(B+C)$

[P3] Elemento neutro: $\exists O\in\mathcal{M}_{mxn}\ /\ A+O=A$

[P4} Elemento opuesto: $\exists(-A)=\left(-a_{ij}\right)\in\mathcal{M}_{mxn}/A+(-A)=O$

$$(\mathcal{M}_{mxn},+)\ \textit{grupo conmutativo}$$

4.2 Producto de un número real (escalar) por una matriz

Sean $\alpha\in\mathbb{R}\ y\ A=\left(a_{ij}\right)\in\mathcal{M}_{mxn}$

Definimos el producto $\alpha\cdot A$ como la matriz $\left(\alpha\cdot a_{ij}\right)\in\mathcal{M}_{mxn}$

Ejemplo 2

$$2\cdot\begin{pmatrix}-1&2&4\\1/2&-3&1\\1&-1&3/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&4&8\\1&-6&2\\1&-2&3\end{pmatrix}$$

4.2.1 Propiedades

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall A, B \in \mathcal{M}_{mxn}$ se tiene:

[P1] Distributiva respecto de la suma de matrices:

$$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$$

[P2] Distributiva respecto de la suma de escalares:

$$(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$$

[P3] Asociativa de escalares:

$$\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$$

[P4] $1 \cdot A = A$

Puede ser interesante hacer notar que la operación producto que hemos significado con $\cdot$ es distinta de la operación producto entre números reales que la significamos de la misma forma; no hay confusión alguna puesto que siempre sabemos a qué afecta el mismo.

4.3 Trasposición de matrices

Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mxn}$. Se llama **matriz traspuesta** de A, y se escribe A^t a la matriz de dimensión nxm que resulta de intercambiar entre sí las filas y las columnas de A, esto es $A^t = (a_{ji}) \in \mathcal{M}_{nxm}$.

Ejemplo 3

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 8 \\ 1 & -6 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \; y \; A^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & -2 \\ 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Vemos las propiedades de la trasposición de matrices que son bastante evidentes:

[P1] $(A + B)^t = A^t + B^t$ La traspuesta de la suma es la suma de traspuestas.

[P2] $(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t$

[P3] $(A^t)^t = A$

- **Matriz simétrica** es toda matriz cuadrada que coincida con su traspuesta.

$$A \; simétrica \Leftrightarrow A = A^t$$

- **Matriz antisimétrica** es toda matriz cuadrada que coincida con la opuesta de su traspuesta.

$$A \; antisimétrica \Leftrightarrow A = -A^t$$

Toda matriz cuadrada se puede descomponer en suma de una simétrica $B = \frac{1}{2} \cdot (A + A^t)$ y una antisimétrica $C = \frac{1}{2} \cdot (A - A^t)$

4.4 Producto de matrices

Es importante empezar diciendo que no todas las matrices se pueden multiplicar unas por otras. La definición que se va a dar implica necesariamente que el número de columnas de la matriz multiplicando debe coincidir con el número de filas de la matriz multiplicador, obteniendo, en este caso, una matriz que tendrá tantas filas como la matriz multiplicando y tantas columnas como la multiplicador.

Por ejemplo, no tendrá sentido multiplicar $A \cdot B$ siendo $A \in \mathcal{M}_{2x3}$ y $B \in \mathcal{M}_{2x3}$ pues no coincide el número 3 de columnas de A con el número 2 de filas de B.

Sean $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mxn} \; y \; B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{nxp}$ definimos su producto $A \cdot B$ como una nueva matriz $C = (c_{ik}) \in \mathcal{M}_{mxp}$ donde el elemento c_{ik} se obtiene sumando los productos de cada elemento de la fila i de la matriz A por los de la columna j de la matriz B, esto es

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nk}$$

Ejemplo 4

Multiplicamos una matriz de dimensión $3x2$ por otra de dimensión $2x3$ incidiendo en que se pueden multiplicar y la dimensión de la matriz producto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 19 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & -19 & -13 \end{pmatrix}$$

Propiedades

[P1] No conmutativa. Basta considerar dos matrices que no conmuten.
[P2] Asociativa: $\forall A \in \mathcal{M}_{mxn}, \forall B \in \mathcal{M}_{nxp}, \forall C \in \mathcal{M}_{pxq} \quad A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
[P3] Distributiva del producto respecto de la suma: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ siendo $A \in \mathcal{M}_{mxn}$ y $B, C \in \mathcal{M}_{nxp}$.
[P4] Elemento neutro (unidad): Dada $A \in \mathcal{M}_{mxn}$, existen las matrices unidad de orden n , I_n y de orden m , I_m tales que $A \cdot I_n = A$ y $I_m \cdot A = A$.
[P5] $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

* **Matriz ortogonal** es una matriz cuadrada de orden n A tal que $A \cdot A^t = I_n$.

4.5 Potencia de una matriz

Una potencia, de exponente natural, de una matriz cuadrada no es más que una forma abreviada de expresar el producto de dicha matriz por sí misma un cierto número de veces:

$$A \in \mathcal{M}_n \qquad A^n = A \cdot A \cdot \overset{(n}{\widehat{\ldots}} \cdot A$$

5. Inversa de una matriz cuadrada

Sea $A \in \mathcal{M}_n$. La inversa de A, si existe, es una matriz cuadrada que escribiremos A^{-1} que cumple $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.

Ejemplo 5

Consideremos la matriz cuadrada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula su inversa A^{-1}

Sea $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Obligando a que $A \cdot A^{-1} = I$ obtenemos dos sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas que resolvemos fácilmente. Así:

La matriz inversa es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & 1/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$

6. Dependencia e independencia lineal. Rango de una matriz

Vamos a dar el concepto de combinación lineal de filas (columnas) de una matriz, dependencia e independencia lineal de filas (columnas) de una matriz y definir el rango de una matriz A.

6.1 Combinaciones lineales

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & 4 & 2 & 25 \end{pmatrix}$

Podemos observar que la fila tercera F_3 es el resultado de sumar a la segunda el triple de la primera: $F_3 = 3 \cdot F_1 + F_2$. Diremos de la fila F_3 es combinación lineal de F_1 y F_2 y que el conjunto $\{F_1, F_2, F_3\}$ es linealmente dependiente.

En general, en una matriz, una fila F es **combinación lineal** de otras filas $\{f_1, f_2, \ldots, f_k\}$ cuando se puede expresar $F = \alpha_1 \cdot f_1 + \alpha_2 \cdot f_2 + \cdots + \alpha_k f_k$ siendo los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ números reales o escalares. (Análogo para columnas)

6.2 Dependencia e independencia lineal

Un conjunto de filas de una matriz es **linealmente dependiente** si al menos una de ellas que es combinación lineal de las demás. En caso contrario se dice que son **linealmente independientes**. (Análogo para columnas)

6.3 Rango de una matriz

El rango de una matriz es el número máximo de filas (columnas) linealmente independientes.

Método de Gauss para calcular el rango de una matriz

1º] Escalonamos la matriz aplicando el método de Gauss con sus transformaciones elementales.
2º] Una vez escalonada, el rango de la matriz es el número de filas no nulas.
(Análogo para columnas)

Ejemplo 6

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 7 & 8 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Aplicamos el método de Gauss para escalonarla:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 7 & 8 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2+F_1 \\ F_3+F_1}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El número de filas no nulas es 2. Por tanto $rg(A) = 2$.
