

1. Experimentos aleatorios

Existen fenómenos donde la concurrencia de unas circunstancias fijas no permite anticipar cuál será el efecto producido. Por ejemplo, si una moneda cae al suelo, no es posible conocer por anticipado el punto exacto donde irá a parar; cuando se colocan bolas idénticas numeradas en una bolsa y se extrae una bola a ciegas, no es posible determinar con total certeza qué bola será elegida; si se realiza todos los días el mismo trayecto entre dos puntos alejados, entonces nunca se tardará exactamente el mismo tiempo; etc.

Estos experimentos son llamados **aleatorios**, puesto que el resultado del fenómeno en estudio es consecuencia del azar. Los experimentos no aleatorios se llaman **deterministas**.

En estas situaciones el carácter impredecible de las consecuencias del azar hace inútil cualquier intento de hallar reglas deterministas que rijan la aparición de resultados individuales. Sin embargo, es falso decir que el azar no está sometido a leyes, lo que ocurre es que no son leyes necesarias, que determinen unívocamente el resultado de cada experimento, sino que atañen a la frecuencia de los resultados que se obtienen cuando el fenómeno se repite un gran número de veces.

El Cálculo de Probabilidades se ocupa de estudiar fenómenos aleatorios, es decir, situaciones que, repetidas bajo condiciones idénticas, pueden dar lugar a diversos resultados, de manera que no puede predecirse con certeza absoluta cuál de ellos ocurrirá. Se dice entonces que el resultado es consecuencia del azar o que se trata de un **fenómeno aleatorio**.

Ante fenómenos de azar, la tendencia natural es tratar de medir el grado de verosimilitud de los diversos acontecimientos posibles asignando una probabilidad a cada uno de ellos; es decir, un valor numérico que informa de la frecuencia con que hay que esperar que se presente cada uno, después de numerosas observaciones del fenómeno. En concreto, la probabilidad de cada acontecimiento posible es un número de $[0, 1]$, que expresa la frecuencia teórica con que dicho acontecimiento se presentará en una serie indefinidamente larga de repeticiones del experimento realizadas en condiciones idénticas.

En el estudio de un fenómeno en que interviene el azar hay dos facetas fundamentales:

- Los posibles acontecimientos que pueden producirse, es decir, el espacio muestral y sus correspondientes sucesos.
- La valoración de la probabilidad de los acontecimientos posibles.

2. Espacio muestral y sucesos aleatorios

En un experimento aleatorio, los resultados posibles constituyen un conjunto denominado **espacio muestral** del fenómeno aleatorio y se denota por **E** . Se llaman **sucesos** a los distintos subconjuntos de **E** , que en el caso de contener a un único elemento son llamados **sucesos elementales** y en el caso de contener dos o más elementos son llamados **compuestos** (y son uniones de sucesos elementales).

Ejemplo

Se considera el lanzamiento de una moneda. El espacio muestral es

$$E = \{C, X\}$$

donde $C = \text{"cara"}$ y $X = \text{"cruz"}$.

Se considera el lanzamiento de un dado. El espacio muestral es

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

El suceso "obtener un 2", $\{2\}$ es elemental y el suceso "obtener par", $\{2, 4, 6\}$ es compuesto.

La identificación de los sucesos relativos a un experimento aleatorio implica disponer de operaciones para formar nuevos sucesos desde otros sucesos dados.

4. Aproximaciones a la noción de probabilidad

4.1 Definición frecuentista

Ante un experimento aleatorio regido por el azar, la tendencia implica medir el grado de verosimilitud de los acontecimientos posibles, asignando una probabilidad a cada uno de ellos que informe de la frecuencia con que hay que esperar que se presente cada uno, después de numerosas observaciones del experimento.

Por ejemplo, supongamos una urna con 3 bolas idénticas (2 rojas y 1 blanca).

La frecuencia real se conoce con exactitud cuando, por ejemplo,

(i) repitiendo el experimento 12 veces, se obtiene 7 rojas y 5 blancas; es decir

$$\text{frecuencia de "obtener roja"} = \frac{7}{12} = 0'58333 \dots$$

$$\text{frecuencia de "obtener blanca"} = \frac{5}{12} = 0'41666 \dots$$

(ii) repitiendo el experimento 120 veces, se obtiene 69 rojas y 51 blancas; es decir

$$\text{frecuencia de "obtener roja"} = \frac{69}{120} = 0'575$$

$$\text{frecuencia de "obtener blanca"} = \frac{51}{120} = 0'425$$

(iii) repitiendo el experimento 1200 veces, se obtiene 822 rojas y 378 blancas; es decir

$$\text{frecuencia de "obtener roja"} = \frac{822}{1200} = 0'685$$

$$\text{frecuencia de "obtener blanca"} = \frac{378}{1200} = 0'315$$

Análogamente, el experimento podría repetirse 10000, 100000, ... veces, concluyendo que, en una sucesión ilimitada de repeticiones, en idénticas condiciones, de un experimento aleatorio, las frecuencias tras cada repetición tienden a aproximarse hacia ciertos valores límites. El valor límite de la frecuencia de un suceso es lo que se desea expresar mediante su probabilidad frecuentista. (Ley de los grandes números)

Entonces,

$p(\text{"Obtener bola roja"}) = \frac{2}{3} = 0'666 \dots$; $p(\text{"Obtener bola blanca"}) = \frac{1}{3} = 0'333 \dots$ cuando se extrae al azar una bola.

Ejercicio 5

Lanzamos una moneda al aire. Se pide:

a) Describe el espacio muestral E.

b) La probabilidad de los sucesos elementales de E.

Ejercicio 6

Una máquina produce tornillos. ¿Cómo harías para calcular la probabilidad de que, escogido un tornillo al azar, sea defectuoso?

4.2 Regla de Laplace

Para atribuir probabilidades a los sucesos relativos a un experimento aleatorio con espacio muestral finito, existe una norma de utilidad cuando todos los sucesos elementales son igualmente probables. La regla de Laplace fue propuesta por P.S. Laplace (1749-1827) y representa el primer antecedente explícito del concepto de probabilidad.

La aplicación de la **regla de Laplace** puede presentar dificultades a la hora de comprobar la equiprobabilidad de los sucesos elementales. No obstante, en situaciones sencillas, la simetría de los resultados del experimento permite garantizar su equiprobabilidad:

$$p(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } A}{\text{número de casos posibles}}$$

Consecuencias

- [1] La probabilidad de cualquier suceso A es positiva o cero.
- [2] La probabilidad del suceso seguro es 1: $p(E) = 1$.
- [3] La probabilidad de un suceso es igual a 1 menos la de su contrario: $p(A) = 1 - p(\bar{A})$
- [4] La probabilidad del suceso imposible es 0: $p(\emptyset) = 0$
- [5] La probabilidad de un suceso es un número entre 0 y 1: $0 \leq p(A) \leq 1$

Ejercicio 7

En un campamento hay 32 alumnos europeos, 13 americanos, 15 africanos y 23 asiáticos. Se elige al azar un alumno para que sea el portavoz. ¿Qué probabilidad hay de que sea europeo?

Ejercicio 8

De una urna que contiene 5 bolas rojas, 4 verdes y 2 amarillas se extrae una bola sin mirar. Halla la probabilidad de que sea:

- a) amarilla
- b) roja
- c) verde
- d) no amarilla
- e) no verde
- f) no roja

Ejercicio 9

Halla la probabilidad de los siguientes sucesos asociados a extraer una carta de una baraja española:

- a) Que sea un as
- b) Que sea una espada
- c) Que sea un número mayor que 7
- d) Que sea la sota de copas.

Ejercicio 10

La urna de un sorteo contiene 100 bolas numeradas del 1 al 100. Pedro lleva todas las papeletas de los números que terminan en 5 y Elena todas las papeletas de los números que son múltiplos de 13. ¿Quién tiene más probabilidad de ganar?

Ejercicio 11

Se lanzan tres monedas al aire. Determina la probabilidad de obtener:

- a) Exactamente dos caras.
- b) Al menos una cruz.

Ejercicio 12

En una bolsa hay bolas numeradas del 1 al 5. Extraemos 5000 veces una bola, anotamos el resultado y la devolvemos a la bolsa. Los resultados son los siguientes:

| Bola | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------|------|-----|-----|------|------|
| f_i | 1200 | 800 | 700 | 1300 | 1000 |

- a) Calcula la probabilidad de obtener múltiplo de 2.
- b) Si en la bolsa hay 100 bolas, justifica cuántas hay de cada clase.

Ejercicio 13

En una escuela de música los alumnos se tienen que matricular en el estudio de un instrumento: guitarra o piano. La siguiente tabla recoge las matriculaciones:

| | Chico | Chica |
|----------|-------|-------|
| Guitarra | x | 6 |
| Piano | 9 | 12 |

- a) Calcula el número de chicos que estudiarán guitarra, si corresponde al 25% de los alumnos matriculados.
- b) Si escogemos un alumno al azar, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:
A="Estudiar guitarra"; B="Ser chica y estudiar piano"; C="No ser chico y estudiar guitarra"

Ejercicio 14

Lanzamos dos dados y sumamos las puntuaciones obtenidas. Halla la probabilidad de obtener:

- a) 12
- b) 7
- c) Por lo menos 3
- d) Múltiplo de 5