1º) Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$ **, calcula el valor del determinante** $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2 & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Solución

$$\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2 & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -10$$

2º) Si A es una matriz cuadrada de orden 4 tal que $|A| = 3$, ¿cuánto vale $|2 \cdot A|$?

Solución

$|2 \cdot A| = 2^4 \cdot |A| = 48$

3º) Encuentra todas las matrices X que conmutan con la matriz A=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Solución

Sean $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ las matrices buscadas.

$A \cdot X = X \cdot A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c & d \\ 3a & 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b & a \\ 3d & c \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} c = 3b \\ d = a \\ 3a = 3d \\ 3b = c \end{cases}$ de donde las matrices buscadas son de la forma $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

4º) Dadas las matrices $A = (2 \quad 1 \quad -1)$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz $N = B \cdot A$

b) Resuelve la ecuación $N \cdot X = C + X$

Solución

a) $N = B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (2 \quad 1 \quad -1) = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

b)

$$N \cdot X = C + X \Longrightarrow N \cdot X - X = C \Longrightarrow (N - I) \cdot X = C \Longrightarrow (N - I)^{-1} \cdot (N - I) \cdot X = (N - I)^{-1} \cdot C$$

Por tanto $X = (N - I)^{-1} \cdot C$

Sea $P = N - I = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ -4 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; Calculemos $P^{-1} = (N - I)^{-1}$:

$|P| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -3 \\ -4 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$; Tiene inversa

$P_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4$; $P_{12} = -\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4$; $P_{13} = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$P_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3$; $P_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4$; $P_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$P_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -3$; $P_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 2$; $P_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = -3$

Matriz adjunta de P: $Adj(P) = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Matriz traspuesta de la matriz adjunta: $[Adj(P)]^t = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -4 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Matriz inversa de P: $P^{-1} = (N-I)^{-1} = \frac{1}{|P|} \cdot [Adj(P)]^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -4 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Así, la solución de la ecuación es $X = (N-I)^{-1} \cdot C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -4 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

5º) Una fábrica de helados fabrica tres tipos de helados, H1, H2 y H3, a partir de tres ingredientes A, B y C. De desea saber el precio unitario de cada ingrediente sabiendo que el helado H1 se elabora con 2 unidades de A, una unidad de B y una unidad de C y supone un coste de 0,9 euros. El helado H2 se elabora con 1 unidad de A, dos unidades de B y una unidad de C y supone un coste de 0,8 euros. El helado H3 se elabora con 1 unidad de A, una unidad de B y dos unidades de C y supone un coste de 0,7 euros.

Solución

$x \equiv precio\ unitario\ del\ ingrediente\ A$
$y \equiv precio\ unitario\ del\ ingrediente\ B$
$z \equiv precio\ unitario\ del\ ingrediente\ C$

El sistema de ecuaciones lineales es $\begin{cases} 2x + y + z = 0{,}9 \\ x + 2y + z = 0{,}8 \\ x + y + 2z = 0{,}7 \end{cases}$ que resolvemos por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0{,}8 \\ 2 & 1 & 1 & 0{,}9 \\ 1 & 1 & 2 & 0{,}7 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0{,}8 \\ 0 & -3 & -1 & -0{,}7 \\ 0 & -1 & 1 & -0{,}1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0{,}8 \\ 0 & -1 & 1 & -0{,}1 \\ 0 & -3 & -1 & -0{,}7 \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0{,}8 \\ 0 & -1 & 1 & -0{,}1 \\ 0 & -3 & -1 & -0{,}7 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0{,}8 \\ 0 & -1 & 1 & -0{,}1 \\ 0 & 0 & -4 & -0{,}4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0{,}8 \\ -y + z = -0{,}1 \\ -4z = -0{,}4 \end{cases} \text{ de donde}$$

$$x = 0{,}3\text{ €} \ ; \ \ y = 0{,}2\text{€} \ ; \ \ z = 0{,}1\text{ €}$$

6º) Considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real k:

$$\begin{cases} x + y + (k+1)\,z = 9 \\ 3x - 2y + z = 20k \\ x + y + 2kz = 9 \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro k.
b) Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

Solución

Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k+1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2k \end{pmatrix}$

Matriz ampliada con la columna de términos independientes: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k+1 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 20k \\ 1 & 1 & 2k & 9 \end{pmatrix}$

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k+1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2k \end{vmatrix} \overset{C_2 - C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & k+1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 2k \end{vmatrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & k+1 \\ 1 & 2k \end{vmatrix} = -5 \cdot (k-1)$$

$|A| = 0 \iff -5 \cdot (k-1) = 0 \iff k = 1$

Caso 1 $\forall k \in \mathbb{R}\ \ k \neq 1\ \ |A| \neq 0$. Por tanto $rg(A) = 3 = rg(A^*) = n^{\underline{o}}\ incógnitas$

$Sistema\ Compatible\ Determinado\ (Solución\ única)$

Caso 2 $k = 1$ En este caso $|A| = 0\ \ y\ \ rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 20 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$.

En la matriz ampliada coinciden la fila 1 y la fila 3; su rango coincidirá con el de A: $rg(A^*) = 2$

$$rg(A) = rg(A^*) = 2 < n^{\underline{o}}\ incógnitas: \quad Sistema\ Compatible\ Indeterminado.$$

b) Resolvemos para $a = -1$.

Observando el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, el sistema equivalente viene dado por las ecuaciones cuyos coeficientes forman parte de dicho menor, esto es

$$\begin{cases} x \quad + y + 2z = 9 \\ 3x - 2y + z = 20 \end{cases}$$

Las incógnitas principales del sistema son aquellas cuyos coeficientes forman parte de las columnas del menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, es decir x e y. La incógnita z actúa como incógnita no principal o parámetro. Así, tenemos:

$z = t$; $\begin{cases} x \quad + y \ = 9 - 2t \\ 3x - 2y \ = \ 20 - t \end{cases}$ $\forall t \in \mathbb{R}$, de donde $\begin{cases} 2x + 2y \ = 18 - 4t \\ 3x - 2y \ = \ 20 - t \end{cases}$ y sumando miembro a miembro obtenemos $5x = 38 - 5t$; $x = \frac{38}{5} - t$; sustituyendo este valor en la primera ecuación obtenemos $\frac{76}{5} + 2y = 18 - 4t$ y despejando tenemos el valor $y = \frac{7}{5} - t$

La solución viene dada por $\begin{cases} x = \frac{38}{5} - t \\ y = \frac{7}{5} - t \\ z = \quad t \end{cases}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

Puntuación

1, 2 ----------- 1 punto
3 -------------- 1'5 "
4, 5 ----------- 2 "
6 -------------- 2'5 "