1º) Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ a & 0 & 8\\ -1 & a & -6\end{pmatrix}$

a) Determina para qué valores de $a\in\mathbb{R}$ **es invertible** A.
b) Calcula A^{-1} **para** $a=0$
c) Para $a=0$, **resuelve el sistema** $A\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

Resolución

a) Calculamos el determinante de la matriz A: $|A|=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ a & 0 & 8\\ -1 & a & -6\end{vmatrix}=a^2+10a-24$

Vemos qué valores anulan el determinante: $a^2+10a-24=0\Longrightarrow\begin{cases}a=-12\\ a=2\end{cases}$

Por lo tanto A *es* invertible $\forall a\in\mathbb{R}-\{-12,2\}$.

b) $a=0$. En este caso la matriz es $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 8\\ -1 & 0 & -6\end{pmatrix}$ y su determinante $|A|=-24$

Los adjuntos son:
$A_{11}=0;\ A_{12}=-8;\ A_{13}=0\,;A_{21}=18\,;A_{22}=-5\,;A_{23}=-3\,;\ A_{31}=24\,;A_{32}=-8\,;A_{33}=0$

La matriz inversa es: $A^{-1}=\frac{-1}{24}\begin{pmatrix}0 & 18 & 24\\ -8 & -5 & -8\\ 0 & -3 & 0\end{pmatrix}$

c) Para $a=0$, $|A|=-24$ y, por tanto $rg(A)=3$
Al tratase de un sistema homogéneo la única solución posible es la trivial $x=y=z=0$

2º] Se considera el sistema $\begin{cases}x+2y-az=1\\ \quad -y+z=0\\ ax\quad +z=a\end{cases}$

a) Discútase según los valores del parámetro real a.
b) Resuélvase el sistema en el caso $a=1$.

Resolución

a) Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -a\\ 0 & -1 & 1\\ a & 0 & 1\end{pmatrix}$

Matriz ampliada con la columna de términos independientes: $A^*=\begin{pmatrix}1 & 2 & -a & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ a & 0 & 1 & a\end{pmatrix}$

$$det(A)=|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -a\\ 0 & -1 & 1\\ a & 0 & 1\end{vmatrix}=-(a-1)^2$$

$|A|=0\iff a=1$

Caso 1 $\forall a\in\mathbb{R}\ \ a\neq 1$. $|A|\neq 0$. Por tanto $rg(A)=3=rg(A^*)=n^{\underline{o}}\ incógnitas$

Sistema Compatible Determinado (Solución única)

Caso 2 $a=1$. En este caso $|A|=0\ \ y\ \ rg(A)<3$.

Matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^*=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

Calculemos el rango de la matriz A:

Como $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-1\neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A)=2$, $rg(A^*)\geq 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$ Por tanto $rg(A^*) = 2.$

$$rg(A) = rg(A^*) = 2 < nº\ incógnitas\text{:}\ Sistema\ compatible\ Indeterminado$$

b) Observando el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, el sistema equivalente viene dado por las ecuaciones cuyos coeficientes forman parte de dicho menor, esto es $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ \quad -y + z = 0 \end{cases}$

Las incógnitas principales del sistema son aquellas cuyos coeficientes forman parte de las columnas del menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, es decir x e y. La incógnita z actúa como incógnita no principal o parámetro. Así, tenemos:

$z = t;\quad \begin{cases} x + 2y = 1 + t \\ \quad -y \ = -t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R},$ de donde $y = t$; $x = 1 - t$

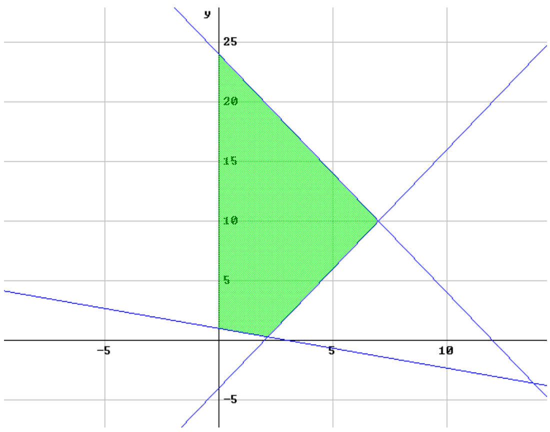
La solución viene dada por $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$

3º] Sea R la región del plano delimitada por el sistema de inecuaciones $R \equiv \begin{cases} x + 3y \geq 3 \\ 2x - y \leq 4 \\ 2x + y \leq 24 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

a) Represéntese la región R y calcúlense las coordenadas de sus vértices.
b) Determínese el punto de R donde la función $f(x,y) = 3x + y$ alcanza su valor máximo. Calcúlese dicho valor.

Resolución

a) La región R del plano es:



Las coordenadas de los vértices de la región R son: $A(0,1)$, $B(0,24)$, $C(7,10)$ y $D\left(\frac{15}{7}, \frac{2}{7}\right)$,

b) Método analítico: Evaluando la función objetivo en cada uno de los vértices, tenemos:

$$f_A = f(0,1) = 1;\ f_B = f(0,24) = 24;\ f_C = f(7,10) = 31;\ f_D = f\left(\frac{15}{7}, \frac{2}{7}\right) = \frac{47}{7} = 6.714285714$$

El valor máximo de $f(x,y)$ se alcanza en el punto $C(7,10)$ y su valor es $f(7,10) = 31$

4º) Disponemos de 15000 euros para la campaña de publicidad de un producto y los tenemos que invertir entre televisión y radio. Si llamamos x al dinero (en miles de euros) invertido en televisión e y al dinero (en miles de euros) invertido en radio, se estima que las ventas (en miles de unidades del producto) que haremos vendrán dadas por:

$$V = x^2 y + 27y + 20$$

Determinar cuánto dinero tenemos que invertir en televisión y en radio para maximizar las ventas y cuál será el valor máximo de ventas que obtendremos.

Resolución

$x \equiv euros\ invertidos\ en\ televisión \quad ; \quad y \equiv euros\ invertidos\ en\ radio$

El planteamiento del problema es: $\begin{cases} V = x^2y + 27y + 20 \ \ maximizar \\ s.a \quad x + y = 15 \end{cases}$

$y = 15 - x \ \ y, sustituyendo, \ \ V(x) = x^2 \cdot (15 - x) + 27 \cdot (15 - x) + 20$

Simplificando, $V(x) = -x^3 + 15x^2 - 27x + 425$

$V'(x) = -3x^2 + 30x - 27 \,; V'(x) = 0 \iff -3x^2 + 30x - 27 = 0 \iff x^2 - 10x + 9 = 0$

Resolviendo la ecuación de segundo grado: $x = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \langle {9 \atop 1}$

$$V''(x) = -6x + 30 \begin{cases} V''(9) = -24 < 0 \ Máximo\ en\ x = 9 : y = 6 \\ V''(1) = 24 > 0 \ \ Mínimo\ en\ x = 1 \ \ ; y = 14 \end{cases}$$

$V(9{,}6) = 9^2 \cdot 6 + 27 \cdot 6 + 20 = 668$

Por tanto, debemos invertir 9000 € en televisión y 6000 € en radio con un valor máximo de ventas de 668000 unidades.

5º) Se considera la función $f(x) = \frac{x^2}{a-bx}$

a) Determina los valores de a y b para los que $f(2) = -4$ y la recta tangente a la gráfica de f en $x = 6$ sea horizontal.

b) Para $a = 1 \ y \ b = -1$, determina su curvatura, puntos de inflexión y asíntotas. Esboza su representación gráfica.

Resolución

a) Del enunciado, $f(2) = -4$ y $f'(6) = 0$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (a-bx) + b \cdot x^2}{(a-bx)^2} \begin{cases} f(2) = -4 \iff \frac{4}{\mathrm{a-2b}} = -4 \ \ \Longrightarrow \mathrm{a - 2b = -1} \\ f'(6) = 0 \iff \frac{12 \cdot (a-3b)}{(a-2b)^2} = 0 \Longrightarrow a - 3b = 0 \end{cases} \qquad \text{de donde } a = -3\,; b = -1$$

b) $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$

Curvatura y puntos de inflexión

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (1+x) - x^2}{(1+x)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(1+x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x+2) \cdot (1+x)^2 - (x^2 + 2x) \cdot 2(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{2}{(1+x)^3} \begin{cases} < 0 \ \ en\ (-\infty, -1)\ Convexa \\ > 0 \ \ en\ (-1, +\infty)\ Cóncava \end{cases}$$

Como $x = -1$ no está en el dominio de la función, ésta no tiene puntos de inflexión.

Asíntotas

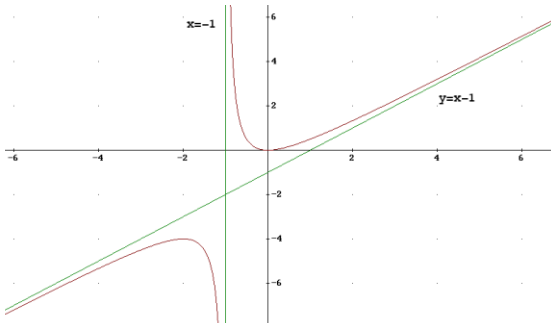
$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2}{1+x} \begin{cases} \lim_{x \to -1^-} \frac{x^2}{1+x} = -\infty \\ \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2}{1+x} = +\infty \end{cases} \quad \text{Por tanto, la recta } x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$$

Como $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{1+x} = \pm\infty$, no hay asíntota horizontal.

$$y = mx + n \begin{cases} m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x + x^2} = 1 \\ n = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - m \cdot x) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2}{1+x} - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x}{1+x} = -1 \end{cases}$$

La recta $y = x - 1$ es asíntota oblicua.

Representación gráfica



6º) Una parcela está rodeada por dos carreteras cuyo trazado viene dado por las funciones $f(x) = -x^2 + 9x - 8$ y $g(x) = 2x - 2$. Si se mide en metros:

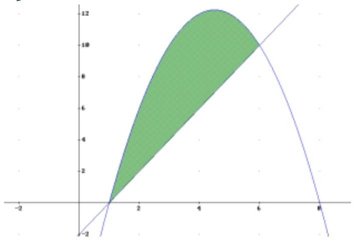
a) Representa la parcela

b) ¿Qué superficie tiene la parcela?

c) Si el 70% de la superficie de la parcela se vende como suelo urbano a 420 € el metro cuadrado, el 20% se tiene que donar al ayuntamiento y el resto se vende como suelo rústico a 45 € el metro cuadrado, ¿cuál es el valor de la parcela?

Resolución

a)



b) Cortes de ambas funciones: $2x - 2 = -x^2 + 9x - 8 \Leftrightarrow$

$$x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$\text{Área}=\int_1^6 (-x^2 + 9x - 8 - (2x - 2))\,dx=\int_1^6 (-x^2 + 7x - 6)\,dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 6x\right]_1^6 = \frac{125}{6}\ m^2$$

c) $0'7 \cdot \frac{125}{6} \cdot 420 + 0'1 \cdot \frac{125}{6} \cdot 45 = 6125 + 93'75 = 6218{,}75$ euros

7º) Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que:

$$p(A \cap B) = 0{,}3 \qquad p(A \cap \bar{B}) = 0{,}2 \qquad p(B) = 0{,}7$$

Calcúlese:

a) $p(A \cup B)$

b) $p(B\ /\ \bar{A})$

Nota: $\bar{S}$ denota el suceso complementario del suceso S.

Resolución

a) $p(A \cap \bar{B}) = 0{,}2 \Leftrightarrow p(A) - p(A \cap B) = 0{,}3$ de donde $p(A) = 0{,}3 + p(A \cap B) = 0{,}5$

Así, $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}7 - 0{,}3 = 0{,}9$

b) $p(B/\bar{A}) = \frac{p(B\cap\bar{A})}{p(\bar{A})} = \frac{p(B)-p(A\cap B)}{1-p(A)} = \frac{0{,}4}{0{,}5} = \frac{4}{5} = 0{,}8$

5º) El peso por unidad, en gramos, de la gamba roja de Palamós, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 5$ gramos.

a) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 25 gambas y la media de sus pesos ha sido $\bar{x}$=70 gramos. Calcúlese un intervalo de confianza al 95% para μ.

b) Se desea aumentar el nivel de confianza al 99% sin aumentar el error de la estimación, ¿cuál debe ser el tamaño muestral mínimo que debe considerarse?

Resolución

a) Variable aleatoria $X \sim N(\mu, 5)$

A un nivel de confianza del 95% le corresponde el valor crítico $z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

$$I.C = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(70 - 1'96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}}, 70 + 1'96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}}\right)$$

$$I.C = (68'04\,, 71'96)$$

b) El error máximo de estimación en el apartado anterior es $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'96 \cdot \frac{5}{5} = 1'96$

Para un nivel de confianza de 0'99 el valor $z_{\alpha/2}$ es 2'575 y, si no aumentamos el error, se tiene:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'575 \cdot 5}{1'96}\right)^2 = 43'15$$

El tamaño muestral mínimo debe ser de 44 gambas.