1º] Considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real k:

$$\begin{cases} x + y + (k+1)z = 9 \\ 3x - 2y + z = 20k \\ x + y + 2kz = 9 \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro k.
b) Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

Resolución

Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k+1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2k \end{pmatrix}$

Matriz ampliada con la columna de términos independientes: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k+1 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 20k \\ 1 & 1 & 2k & 9 \end{pmatrix}$

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k+1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2k \end{vmatrix} \overset{C_2-C_1}{\widehat{=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & k+1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 2k \end{vmatrix} = -5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & k+1 \\ 1 & 2k \end{vmatrix} = -5 \cdot (k-1)$$

$|A| = 0 \iff -5 \cdot (k-1) = 0 \iff k = 1$

Caso 1 $\forall k \in \mathbb{R}\ \ k \neq 1\ \ |A| \neq 0$. Por tanto $rg(A) = 3 = rg(A^*) = nº\ incógnitas$

$$Sistema\ Compatible\ Determinado\ (Solución\ única)$$

Caso 2 $k = 1$ En este caso $|A| = 0\ \ y\ \ rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 20 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$.

En la matriz ampliada coinciden la fila 1 y la fila 3; su rango coincidirá con el de A: $rg(A^*) = 2$

$$rg(A) = rg(A^*) = 2 < nº\ incógnitas:\ \ Sistema\ Compatible\ Indeterminado.$$

b) Resolvemos para $a = -1$.

Observando el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, el sistema equivalente viene dado por las ecuaciones cuyos coeficientes forman parte de dicho menor, esto es

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 3x - 2y + z = 20 \end{cases}$$

Las incógnitas principales del sistema son aquellas cuyos coeficientes forman parte de las columnas del menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, es decir x e y. La incógnita z actúa como incógnita no principal o parámetro. Así, tenemos:

$z = t$; $\begin{cases} x + y = 9 - 2t \\ 3x - 2y = 20 - t \end{cases}$ $\forall t \in \mathbb{R}$, de donde $\begin{cases} 2x + 2y = 18 - 4t \\ 3x - 2y = 20 - t \end{cases}$ y sumando miembro a miembro obtenemos $5x = 38 - 5t$; $x = \frac{38}{5} - t$; sustituyendo este valor en la primera ecuación obtenemos $\frac{76}{5} + 2y = 18 - 4t$ y despejando tenemos el valor $y = \frac{7}{5} - t$

La solución viene dada por $\begin{cases} x = \frac{38}{5} - t \\ y = \frac{7}{5} - t \\ z = t \end{cases}$ $\forall t \in \mathbb{R}$

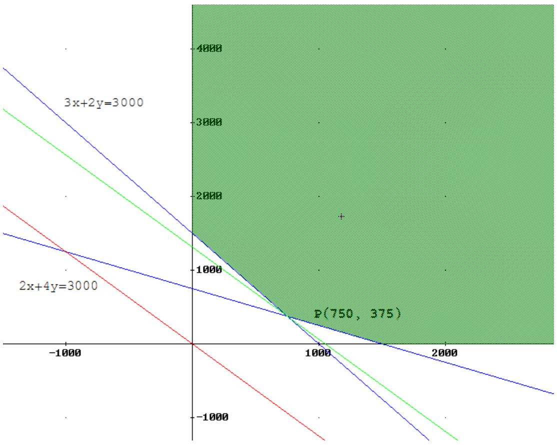
2º] Una empresa organiza a su personal en dos categorías: primera y segunda. Cada trabajador de primera fabrica tres objetos diarios y controla la calidad de dos, cobrando 100 euros diarios. Cada trabajador de segunda cobra 80 euros diarios, fabrica dos objetos diarios y controla la calidad de cuatro objetos cada día. Determinar el coste mínimo del personal necesario para fabricar y controlar un número mínimo de 3000 objetos al día. Determinar el personal requerido para ello y su distribución por categorías.

Resolución

$x \equiv número\ de\ trabajadores\ de\ primera; \quad y \equiv número\ de\ trabajadores\ de\ segunda$

$Función\ Objetivo$: $minimizar\ z = f(x,y) = 100x + 80y$

$$Restricciones: \quad s.a \equiv \begin{cases} 3x + 2y \geq 3000 \\ 2x + 4y \geq 3000 \\ x \geq 0\,; y \geq 0 \end{cases}$$



El mínimo se obtiene en el punto $P(750, 375)$.
El coste mínimo del personal necesario para fabricar un mínimo de 3000 objetos al día es de $100 \cdot 750 + 80 \cdot 375 = 105000$ € y se produce con 750 trabajadores de primera y 375 de segunda.

3º] Para cada valor del número real t, se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & t & 2t^2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) **Encontrar todos los valores de t para los que la matriz A no tiene inversa**.
b) **Calcula la matriz inversa A^{-1} para $t = -1$**.

Resolución

a) $\begin{vmatrix} 1 & t & 2t^2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t & 2t^2 \\ 0 & -1-t & -2t^2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - t + 2t^2\,;\ 2t^2 - \boldsymbol{t} - \mathbf{1} = \mathbf{0} \Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{t} = \mathbf{1} \\ \boldsymbol{t} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \end{cases}$

La matriz no tiene inversa para $\begin{cases} \boldsymbol{t} = \mathbf{1} \\ \boldsymbol{t} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \end{cases}$

b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$

4º] Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - a & si\ \ x \leq -1 \\ -3x^2 + b & si\ \ -1 < x < 1 \\ Lx + a & si\ \ x \geq 1 \end{cases}$

a) Calcúlense a y b, para que la función f sea continua en todos los puntos.
b) Para $a = 0$ y $b = 3$, represéntese gráficamente la función f.
c) Para $a = 0$ y $b = 3$, calcúlese la integral definida $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

Resolución

a) $\forall x \in \mathbb{R}\ \ x < 1,\ \ f(x) = 2x^2 - a$: continua por ser función polinómica.

$\forall x \in \mathbb{R}\ \ -1 < x < 1,\ \ f(x) = -3x^2 + b$: continua por ser función polinómica.

$\forall x \in \mathbb{R}\ \ x > 1,\ \ f(x) = Lx + a$: continua porque la función logarítmica lo es.

Para que la función sea continua en los puntos $x = -1$ y $x = 1$ tenemos:

$x = -1$

1] $f(-1) = 2 - a$

2] $\lim\limits_{x \to -1} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} (2x^2 - a) = 2 - a \\ \lim\limits_{x \to -1^+} (-3x^2 + b) = -3 + b \end{cases}$ de donde $2 - a = -3 + b$, esto es, $a + b = 5$ (1)

$x = 1$

1] $f(1) = L1 + a = a$

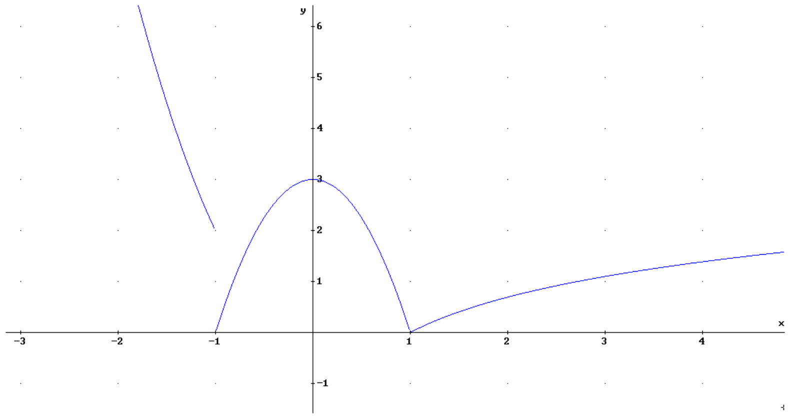
2] $\lim_{x\to 1} f(x) \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} (-3x^2+b) = -3+b \\ \lim_{x\to 1^+} (Lx+a) = a \end{cases}$ de donde $a = -3+b$ o $a-b=-3$ (2)

Para que $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$, las expresiones (1) y (2) han de verificarse a la vez. Tenemos así el sistema de ecuaciones $\begin{cases} a+b=5 \\ a-b=-3 \end{cases}$ que nos da la solución $a=1$ y $b=4$.

b) $a=0$; $b=3$

La función es $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & si \;\; x \le -1 \\ -3x^2+3 & si \; -1<x<1 \\ Lx & si \; x \ge 1 \end{cases}$

Su representación gráfica es:



c) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & si \;\; x \le -1 \\ -3x^2+3 & si \; -1<x<1 \\ Lx & si \; x \ge 1 \end{cases}$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} (-3x^2+3)\,dx = [-x^3+3x]_{-1}^{1} = 4u^2$$

5º] Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = \frac{x^2+x+2}{x}$ $\quad x \neq 0$

a) Determínense las asíntotas de f.

b) Determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcúlense sus máximos y mínimos relativos.

c) Calcúlese una primitiva $F(x)$ de $f(x)$ tal que $F(1)=0$.

Resolución

a) A. Vertical: La recta $x=0$; A. Horizontal: No tiene ; A. Oblicua: La recta $y=x+1$

b) Creciente: $(-\infty,-\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2},+\infty)$; Decreciente $(-\sqrt{2},0) \cup (0,\sqrt{2})$

Máximo relativo en el punto $P(-\sqrt{2}, 1-2\sqrt{2})$; Mínimo relativo en el punto $Q(\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2})$

c) $F(x) = \int \frac{x^2+x+2}{x} dx = \int \left(x+1+\frac{2}{x}\right) dx = \frac{x^2}{2} + x + 2L|x| + c$

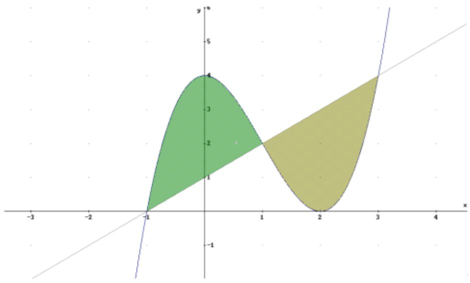
$F(1)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}+1+c=0 \Leftrightarrow c=-\frac{3}{2}$; La primitiva buscada es $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + 2L|x| - \frac{3}{2}$

6º] Se considera la función real de variable real definida por $f(x) = x^3-3x^2+4$

a) Determínese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=-1$.

b) Calcúlese el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f y la recta de ecuación. $y=x+1$.

Resolución



a)

$f'(x) = 3x^2-6x$

$f(-1) = -6$

Recta tangente en $P(-1,0)$:

Pendiente $m = f'(-1) = 9$

$t \equiv y = 9\cdot(x+1)$

$t \equiv y = 9x+9$

b) $A = \int_{-1}^{1} (x^3 - 3x^2 + 4 - (x+1))\, dx + \int_{1}^{3} \left(x + 1 - (x^3 - 3x^2 + 4)\right)\, dx = 8\, u^2$

7º) La probabilidad de que un trabajador llegue puntual a su puesto de trabajo es ¾ y, de ellos, la cuarta parte va en transporte público. Entre los trabajadores que llegan tarde, la mitad va en transporte público. Calcúlese la probabilidad de que:

a) Un trabajador elegido al azar vaya al trabajo en transporte público.

b) Un trabajador elegido al azar llegue tarde al trabajo y vaya en transporte público.

c) Si un trabajador ha llegado a su puesto de trabajo en transporte público, lo haya hecho puntual.

Resolución

Consideramos los sucesos siguientes:

$A = \text{"}Un\ trabajador\ llega\ puntual\ a\ su\ puesto\ de\ trabajo\text{"}$; $S = \text{"}Ir\ en\ transporte\ público\text{"}$

Del enunciado obtenemos que:

$$p(A) = \frac{3}{4}\ ;\ p(\bar{A}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}\ ;\ p(S|A) = \frac{1}{4}\ ;\ p(S|\bar{A}) = \frac{1}{2}$$

a) Aplicando el Teorema de la probabilidad total tenemos:

$$p(S) = p(A)\cdot p(S|A) + p(\bar{A})\cdot p(S|\bar{A}) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{16} + \frac{1}{8} = \frac{5}{16} = 0{,}3125$$

b)

$$p(\bar{A}\cap S) = p(\bar{A})\cdot p(S|\bar{A}) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

c) Aplicando el Teorema de Bayes tenemos que:

$$p(A|S) = \frac{p(A)\cdot p(S|A)}{p(S)} = \frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{5}{16}} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

8º] Se supone que el peso en kilos de los rollos de cable eléctrico producidos por una cierta empresa, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 0,5 kg. Una muestra aleatoria simple de 9 rollos ha dado un peso medio de 10,3 kg.

a) Determínese un intervalo de confianza al 90% para el peso medio de los rollos de cable que produce dicha empresa.

b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral mínimo necesario para que el valor absoluto de la diferencia entre la media muestra y la media poblacional sea menor o igual que 0,2 kg, con probabilidad igual a 0,98?

Resolución

Variable aleatoria $X \rightsquigarrow N(\mu, 0'5)$; Tamaño muestral: $n = 9$; Media muestral: $\bar{x} = 10'3$

a) El intervalo de confianza para el peso medio de los rollos es:

$$I.C = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(10'3 - 1'645\cdot\frac{0{,}5}{\sqrt{9}},\ 10'3 + 1'645\cdot\frac{0{,}5}{\sqrt{9}}\right)$$

$$I.C = (10'026, 10'574)$$

b) Error: $E \le 0'2$; Nivel de confianza: $1 - \alpha = 0{,}98$

A un nivel de confianza de 0'98 corresponde un valor crítico $z_{\alpha/2} = 2'325$.

$$E = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le 0'2 \implies n \ge \left(\frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'325\cdot 0'5}{0'2}\right)^2 = 33'78$$