**1º] Se considera el sistema** $\begin{cases} x+2y-az=1 \\ -y+z=0 \\ ax+z=a \end{cases}$

**a) Discútase según los valores del parámetro real $a$.**
**b) Resuélvase el sistema en el caso $a=1$.**

**Resolución**

**a) Matriz de coeficientes de las incógnitas:** $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -a \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Matriz ampliada con la columna de términos independientes:** $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -a & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$

$$det(A)=|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -a \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix}=-(a-1)^2$$

$|A|=0 \iff a=1$

**Caso 1** $\forall a \in \mathbb{R}\;\; a \neq 1$ . $|A| \neq 0$ . **Por tanto** $rg(A)=3=rg(A^*)=n^{\text{o}}\ incógnitas$

$$Sistema\ Compatible\ Determinado\ (Solución\ única)$$

**Caso 2** $a=1$. **En este caso** $|A|=0\;\; y\;\; rg(A)<3$.

**Matriz de coeficientes** $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **Matriz ampliada** $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

**Calculemos el rango de la matriz $A$:**

**Como** $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$ **, en $A$ hay un menor de orden 2 no nulo y** $rg(A)=2$ , $rg(A^*)\geq 2$.

**Calculamos el rango de la matriz ampliada $A^*$:**

**Orlamos el menor** $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ **, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de $A^*$ :**

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$. **Por tanto** $rg(A^*)=2$.

$$rg(A)=rg(A^*)=2<n^{\text{o}}\ incógnitas:\ Sistema\ compatible\ Indeterminado$$

**b) Observando el menor** $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ **que nos ha dado el rango de la matriz $A$, el sistema equivalente viene dado por las ecuaciones cuyos coeficientes forman parte de dicho menor, esto es** $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -y+z=0 \end{cases}$

**Las incógnitas principales del sistema son aquellas cuyos coeficientes forman parte de las columnas del menor** $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ **que nos ha dado el rango de la matriz $A$, es decir $x$ e $y$. La incógnita $z$ actúa como incógnita no principal o parámetro. Así, tenemos:**

$z=t$; $\begin{cases} x+2y=1+t \\ -y=-t \end{cases}$ $\forall t\in\mathbb{R}$, **de donde** $y=t$ ; $x=1-t$

La solución viene dada por $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$

**2º] Se considera la matriz** $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -a \\ 0 & 1 & -1 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **dependiente del parámetro real** $a$.

**a) Determina los valores de** $a$ **para que la matriz** $A$ **tenga inversa.**

**b) Para** $a = -1$**, resuelve la ecuación** $X \cdot A = I$ **siendo** $I$ **la matriz unidad de orden** $3$.

**Resolución**

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & -a \\ 0 & 1 & -1 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 4a + a^2 \; ; \; 4 + 4a + a^2 = 0 \Leftrightarrow a = -2$$

a) $A \; tiene \; inversa \; \Leftrightarrow a \neq -2$

b) $a = -1$ ; $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ; $|A| = 1$ ; $X \cdot A = I \Longrightarrow X = A^{-1}$. Calculamos la matriz inversa de $A$.

$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$ ; $A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$ ; $A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8$ ; $A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5$ ; $A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 4$

$A_{31} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3$ ; $A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2$ ; $A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$

Matriz adjunta de $A$: $Adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 8 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; Matriz inversa: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Por tanto, $X = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

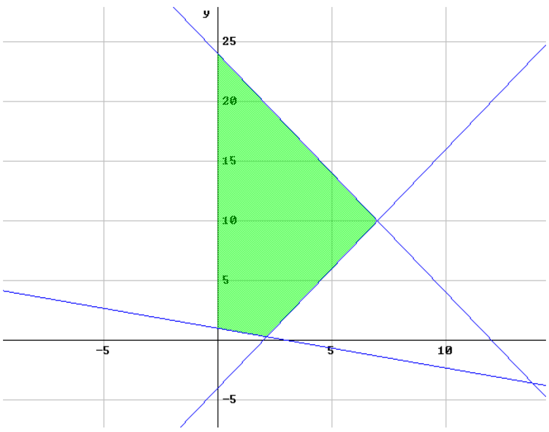
**3º] Sea** $R$ **la región del plano delimitada por el sistema de inecuaciones** $R \equiv \begin{cases} x + 3y \geq 3 \\ 2x - y \leq 4 \\ 2x + y \leq 24 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

**a) Represéntese la región** $R$ **y calcúlense las coordenadas de sus vértices.**

**b) Determínese el punto de** $R$ **donde la función** $f(x, y) = 3x + y$ **alcanza su valor máximo. Calcúlese dicho valor.**

**Resolución**

a) La región $R$ del plano es:




Las coordenadas de los vértices de la región $R$ son: $A(0,1)$, $B(0,24)$, $C(7,10)$ $y$ $D\left(\frac{15}{7}, \frac{2}{7}\right)$,

b) Método analítico: Evaluando la función objetivo en cada uno de los vértices, tenemos:

$$f_A = f(0,1) = 1;\ f_B = f(0,24) = 24;\ f_C = f(7,10) = 31;\ f_D = f\left(\frac{15}{7}, \frac{2}{7}\right) = \frac{47}{7} = 6.714285714$$

El valor máximo de $f(x,y)$ se alcanza en el punto $C(7,10)$ y su valor es $f(7,10) = 31$

**4º] Se considera la función real de variable real definida por** $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & si\ x \leq 1 \\ ln\,x & si\ x > 1 \end{cases}$

**Determina $a$ y $b$ para que sea derivable en el conjunto de los números reales y representa gráficamente la función para dichos valores.**

**Resolución**

a) $\forall x \in \mathbb{R}\ \ x < 1,\ \ f(x) = ax^2 + bx + 1:$ continua por ser función polinómica.

$\forall x \in \mathbb{R}\ \ x > 1,\ \ f(x) = ln\,x:$ continua por ser función logarítmica con dominio $(1, +\infty)$

Exigimos la continuidad en $x = 1$:

1] $f(1) = 0$

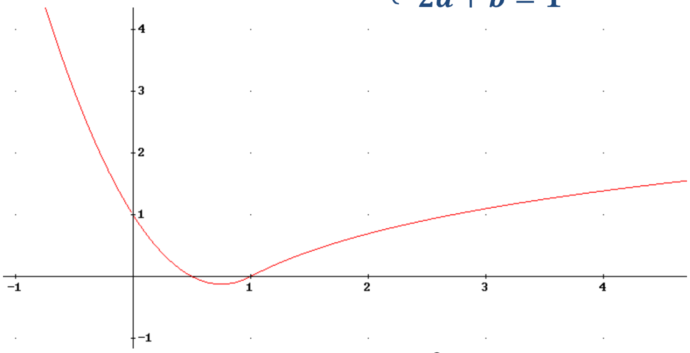
2] $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} (ax^2 + bx + 1) = a + b + 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} (ln\,x) = 0 \end{cases}$ de donde $a + b + 1 = 0$

3] $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Derivabilidad: $f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & si\ x < 1 \\ \frac{1}{x} & si\ x > 1 \end{cases}$ bien definida en $\mathbb{R} - \{1\}$

En $x = 1$ tenemos: $f'^{-}(1) = 2a + b$ y $f'^{+}(1) = 1$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x = 1$ se ha de cumplir $\begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$ con solución $a = 2$ ; $b = -3$



**5º] Para cada valor de $a$ se considera la función** $f(x) = \frac{3x^2 - ax}{x+2}$

**a) Calcula el valor de $a$ para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = 2$.**

**b) Para $a = 3$, halla las asíntotas de la curva $y = f(x)$ y la ecuación de la recta tangente en $x = 0$.**

**Resolución**

a) $f'(x) = \frac{3x^2 + 12x - 2a}{(x+2)^2}$

$f(x)$ mínimo relativo en $x = 2 \Rightarrow f'(2) = 0 \Rightarrow 36 - 2a = 0 \Rightarrow a = 18$

b) $a = 3$ $\quad f(x) = \frac{3x^2 - 3x}{x+2}$ ; $f(0) = 0$ ; $f'(x) = \frac{3x^2 + 12x - 6}{(x+2)^2}$ ; $f'(0) = -\frac{3}{2}$

Asíntota vertical: $x = -2$ ; Asíntota oblicua: $y = 3x - 9$

Recta tangente a la curva en $O(0,0)$: $t \equiv y = -\frac{3}{2}x$

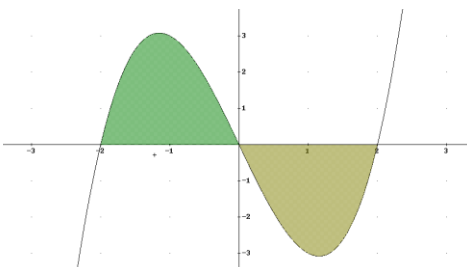
**6º] Se considera la curva de ecuación $y = x^3 - 4x$**

**Calcula el área del recinto plano acotado limitado por la curva y el eje $OX$.**

**Resolución**

Cortes con el eje OX: $x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x \cdot (x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$

La función es impar



El área pedida es:

$$A = 2 \cdot \int_{-2}^{0} (x^3 - 4x)\, dx = 2 \cdot \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0} = 2 \cdot 4 = 8\, u^2$$

**7º] Se tienen tres cajas iguales. La primera contiene 3 bolas blancas y 4 negras; la segunda contiene 5 bolas negras y, la tercera, 4 blancas y 3 negras. Se elige una caja al azar, y luego se extraen dos bolas, de una en una sin reemplazamiento.**
**a) ¿Cuál es la probabilidad de que las bolas extraídas sean negras?**
**b) Si las bolas extraídas han sido negras, ¿cuál es la probabilidad de que procedan de la segunda caja?**

**Resolución**

**Consideramos los siguientes sucesos:**

$C_i =$ "*Se elige la caja i − ésima*" *para* $i = 1, 2, 3$ y $N_j =$ "*La bola j − ésima es negra*" para $j = 1, 2$

$S =$ " *Las dos bolas extraídas son negras*"

**a)** $p(S) \overset{P.Total}{\cong} p(C_1) \cdot p(S|C_1) + p(C_2) \cdot p(S|C_2) + p(C_3) \cdot p(S|C_3) =$

$$= p(N_1) \cdot p(N_2|N_1) \cdot p(C_1) + p(N_1) \cdot p(N_2|N_1) \cdot p(C_2) + p(N_1) \cdot p(N_2|N_1) \cdot p(C_3) =$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{10}{21}$$

**b)** $p(C_2|S) \overset{Bayes}{\cong} \frac{p(C_2) \cdot p(S|C_2)}{p(S)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{10}{21}} = \frac{7}{10}$

**8º] Se probaron 64 automóviles, escogidos aleatoriamente de una misma marca y modelo, por conductores con la misma forma de conducir y en carreteras similares. Se obtuvo que el consumo medio de gasolina, en litros, por cada 100 kilómetros fue de 6,5. Estudios previos indican que el consumo de gasolina tiene una distribución normal de desviación típica 2 litros.**
**a) Determinar un intervalo de confianza al 95% para la media del consumo de gasolina de estos automóviles.**
**b) Determinar cuál es el tamaño mínimo de la muestra que se necesitaría recoger para que el intervalo de confianza tenga una amplitud de medio litro.**
**c) Con qué probabilidad la diferencia, en valor absoluto, entre la media poblacional y la media muestral es menor de medio litro?**

**Resolución**

**Variable aleatoria consumo de gasolina:** $X \sim N(\mu, 2)$

**a) Tamaño muestral:** $n = 64$; **Media muestral:** $\bar{x} = 6'5$; **nivel de confianza:** $1 - \alpha = 0'95$ ; $z_{\alpha/2} = 1'96$.

**El intervalo de confianza para la media del consumo de gasolina es:**

$$I.C = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(6'5 - 1'96 \cdot \frac{2}{\sqrt{64}}, 6'5 + 1'96 \cdot \frac{2}{\sqrt{64}}\right)$$

$$I.C = (6'01, 6'99)$$

**b)** $E \leq 0,25$

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0,25 \Longrightarrow n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1'96 \cdot 2}{0,25}\right)^2 = 245'86$$

**El tamaño de la muestra debe ser, como mínimo, de 246 automóviles**

**c)** $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0'5 \Leftrightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{2}{\sqrt{64}} = 0'5 \Leftrightarrow z_{\alpha/2} = 2$

$p(Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow p(Z \leq 2) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow 0,9772 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \alpha = 0,0456$ **y, en consecuencia** $1 - \alpha = 0,9544$

**El nivel de confianza es del 95,44% o, lo que es lo mismo,** $p(|\mu - \bar{x}| < 0'5) = 0'9544$