1º) Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x+2y \ \ +z=1 \\ x+2y+3z=0 \\ x+ay+2z=0 \end{cases}$$

a) Discútase para los diferentes valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.
b) Resuélvase para $a=0$.

Resolución

a) Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & a & 2 \end{pmatrix}$

Matriz ampliada con la columna de términos independientes: $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & a & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$det(A)=|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} \overset{F_1-F_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & a \end{vmatrix} = -2(a-2)$$

$|A|=0 \iff a=2$

Caso 1 $\forall a \in \mathbb{R}\ \ a \neq 2,\ \ |A| \neq 0$. Por tanto $rg(A)=3=rg(A^*)=n^{\underline{o}}\ incógnitas$

$$Sistema\ Compatible\ Determinado\ (Solución\ única)$$

Caso 2 $a=2$. En este caso $|A|=0\ \ y\ \ rg(A)<3$.

Matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de la matriz A:

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=2\neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A)=2$, $rg(A^*)\geq 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Por tanto $rg(A^*)=3$.

$$2=rg(A)\neq rg(A^*)=3:\ Sistema\ Incompatible\ (No\ tiene\ solución)$$

b) Resolvemos para $a=0$

$$\begin{cases} x \ \ +2y \ \ +z=1 \\ x+2y\ +3z=0 \\ x \qquad\ \ +2z=0 \end{cases} \qquad |A|=4\ \text{ siendo } A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Estamos en el caso 1 estudiado y, por tanto, el sistema es compatible determinado, tiene una única solución. Aplicando la regla de Cramer obtenemos:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{4}=1\ ; \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{4}=\frac{1}{4}; \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{4}=-\frac{1}{2}$$

2º) Se considera la función real de variable real

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{-x+b}{x-2} & si\ x\leq -1 \\ \dfrac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3} & si\ x>-1 \end{cases}$$

a) Determínese para qué valores del parámetro b la función $f(x)$ es continua en $x=-1$.
b) Calcúlense las asíntotas de $f(x)$.

Resolución

a) Las condiciones de continuidad en $x = -1$ son:

1º) $f(-1) = -\frac{1+b}{3}$ existe

2º) $\lim_{x\to -1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to -1^-} \frac{-x+b}{x-2} = -\frac{1+b}{3} \\ \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to -1^+} \frac{(x+1)\cdot(x+5)}{(x+1)\cdot(x+3)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x+5}{x+3} = 2 \end{cases}$

La existencia de $\lim_{x\to -1} f(x)$ obliga a que $-\frac{1+b}{3} = 2$, de donde $b = -7$.

b)

$\forall x \in \mathbb{R}, x \leq -1$ la función es $f(x) = \frac{-x+b}{x-2}$.

Como $\lim_{x\to -\infty} \frac{-x+b}{x-2} = -1$, $f(x)$ tiene una asíntota horizontal, la recta $y = -1$. No hay oblicua.

El polinomio $x - 2$ se anula en $x = 2$ que está en el dominio de la función.

Como $\lim_{x\to a} \frac{-x+b}{x-2} = \frac{b-a}{a-2} \in \mathbb{R}$ para todo valor real de $a \leq -1$, $f(x)$ no tiene asíntotas verticales.

$\forall x \in \mathbb{R}, x > -1$ la función es $f(x) = \frac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3}$.

Como $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3} = 1$, la función $f(x)$ tiene una asíntota horizontal, la recta $y = 1$.

El polinomio $x^2 + 4x + 3$ se anula en $x = -1$ y en $x = -3$ que son valores del dominio de $f(x)$. Por tanto se tiene que

$$\lim_{x\to a} \frac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3} = \frac{a^2+6a+5}{a^2+4a+3} \in \mathbb{R} \text{ para todo valor real de } a \text{ tal que } a > -1$$

3º) Sabiendo que la derivada de una función real de variable real es $f'(x) = 6x^2 + 4x - 2$

a) Determínese la expresión de $f(x)$, sabiendo que $f(0) = 5$.

b) Determínense los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f así como sus máximos y mínimos locales, si los tuviese.

Resolución

a) La función $f(x)$ que buscamos es una primitiva de $f'(x) = 6x^2 + 4x - 2$.

Hallamos las primitivas de $f'(x) = 6x^2 + 4x - 2$:

$$F(x) = \int (6x^2 + 4x - 2)\, dx = 2x^3 + 2x^2 - 2x + c, \qquad con\ c \in \mathbb{R}$$

$$F(0) = 5 \Leftrightarrow c = 5$$

$$f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 2x + 5 \text{ es la expresión que buscamos}$$

b) Estudiamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f mediante el signo de la primera derivada:

$$f'(x) = 6x^2 + 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$f'(x) = 8x^2 + 4x - 2 \begin{cases} > 0\ en(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right) f\ creciente \\ < 0\ en \left(-1, \frac{1}{3}\right) f\ decreciente \end{cases}$$

Del estudio anterior y por tratarse de una función polinómica deducimos sus extremos locales:

$$P(-1,7)\text{ máximo local y } Q\left(\frac{1}{3},\ f\left(\frac{1}{3}\right)\right) \text{ mínimo local}$$

4º) Tenemos dos urnas A y B. La urna A contiene 5 bolas: 3 rojas y 2 blancas. La urna B contiene 6 bolas: 2 rojas y 4 blancas. Se extrae una bola al azar de la urna A y se deposita en la urna B. Seguidamente se extra una bola al azar de la urna B. Calcúlese la probabilidad de que:

a) La segunda bola extraída sea roja.

b) Las dos bolas extraídas sean blancas.

Resolución

Consideramos los sucesos siguientes:
$R_1 = $"*La bola extraída de la urna A es roja*" ; $B_1 = $"*La bola extraída de la urna A es blanca*"
$R_2 = $"*La bola extraída de la urna B es roja*" ; $B_2 = $"*La bola extraída de la urna B es blanca*"
a) Aplicando el teorema de la probabilidad total obtenemos:

$$p(R_2) = p(R_1) \cdot p(R_2|R_1) + p(B_1) \cdot p(R_2|B_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{13}{35}$$

b)

$$p(B_1 \cap B_2) = p(B_1) \cdot p(B_2|B_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$$

5º) El peso por unidad, en gramos, de la gamba roja de Palamós, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 5$ gramos.
a) Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 25 gambas y la media de sus pesos ha sido $\bar{x}$=70 gramos. Calcúlese un intervalo de confianza al 95% para μ.
b) Si sabemos que $\mu = 70$ gramos, y se consideran los pesos de las 12 gambas de una caja como una muestra aleatoria simple, calcúlese la probabilidad de que el peso total de esas 12 gambas sea mayor o igual que 855 gramos.

Resolución

a) Variable aleatoria $X \leadsto N(\mu, 5)$
A un nivel de confianza del 95% le corresponde el valor crítico $z_{\alpha/2} = 1{,}96$.

$$I.C = (\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = \left(70 - 1'96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}}, 70 + 1'96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}}\right)$$

$$I.C = (68`04\ , 71`96)$$

b) $\mu = 70$; $n = 12$
La distribución de las medias muestras es una normal $\bar{X} \leadsto N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, en nuestro caso,

$$\bar{X} \leadsto N(70, \frac{5}{\sqrt{12}}) \Leftrightarrow \bar{X} \leadsto N(70, 1´443)$$

El peso medio de la muestra es $\bar{x}$=$\frac{855}{12} = 71{,}25$

$$p(\bar{X} \geq 71{,}25) \overset{Tipifico}{\triangleq} p\left(Z \geq \frac{71{,}25 - 70}{1{,}443}\right) = p(Z \geq 0'866) = 1 - p(Z < 0'866) = 1 - 0{,}8051 = 0{,}1949$$